Étude mathématique et numérique de structures plasmoniques avec coins

Camille Carvalho

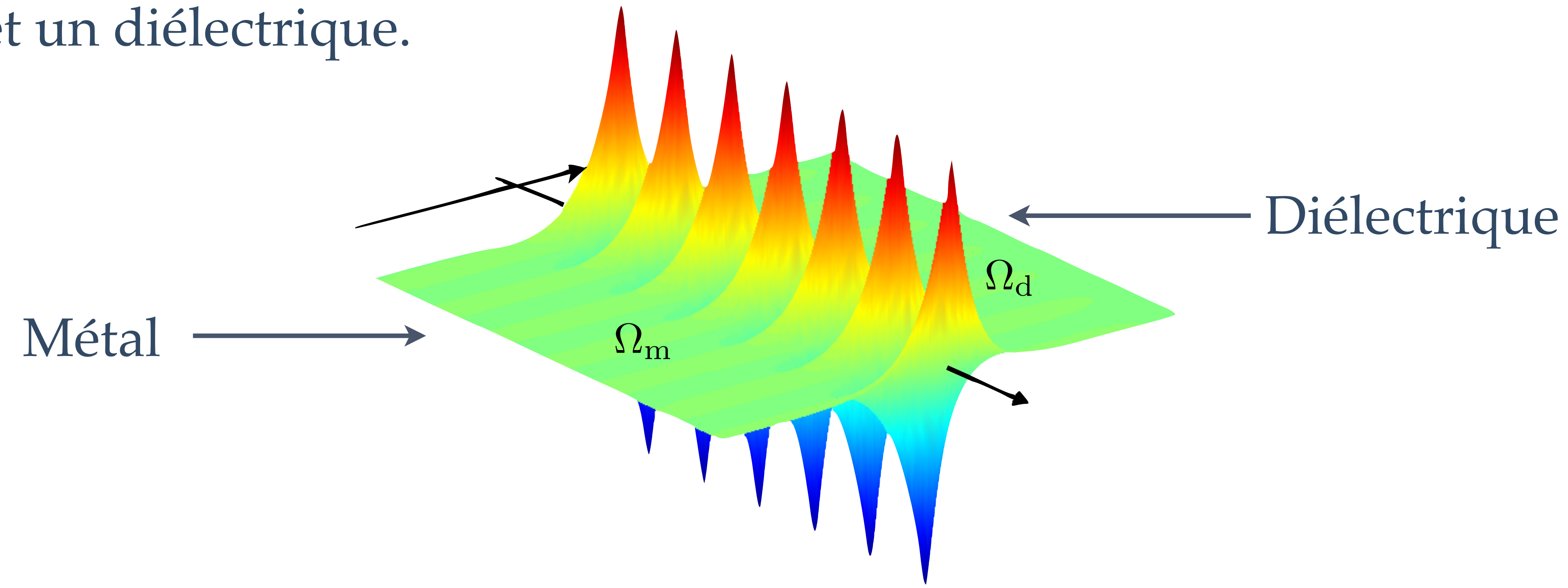
Directeurs de thèse : A.-S. Bonnet-Ben Dhia, P. Ciarlet
POEMS, UMA ENSTA ParisTech

Soutenance de thèse, 4 Décembre 2015

Que sont les plasmons de surface ?

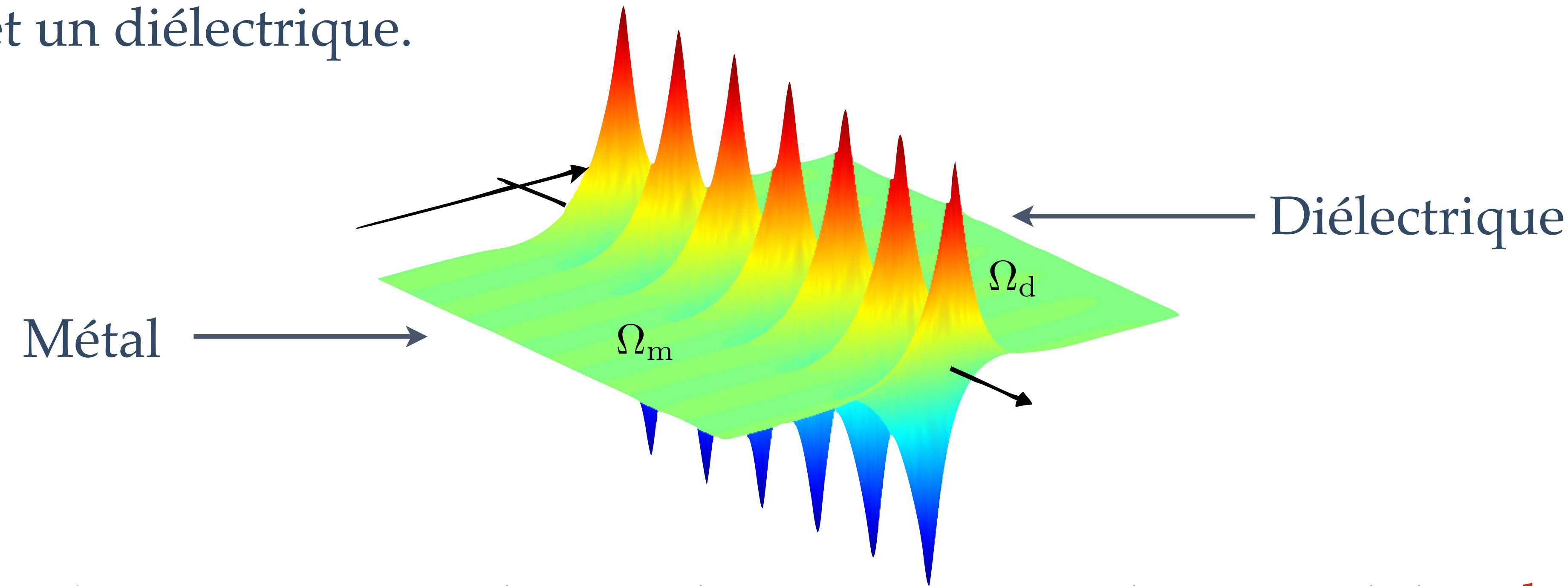
Que sont les plasmons de surface ?

Les plasmons de surface sont des ondes électromagnétiques confinées à l'interface entre un métal et un diélectrique.



Que sont les plasmons de surface ?

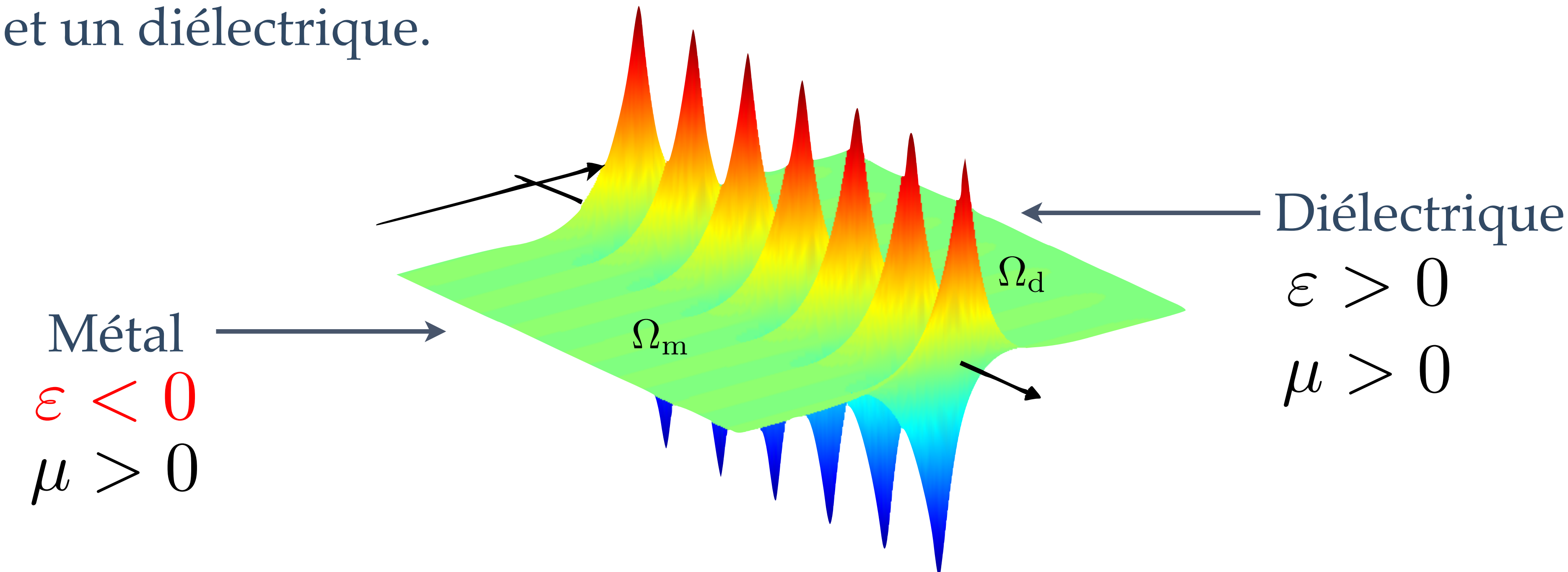
Les plasmons de surface sont des ondes électromagnétiques confinées à l'interface entre un métal et un diélectrique.



De telles ondes n'existent que lorsque la permittivité ou la perméabilité change de signe, ce qui est possible aux fréquences optiques.

Que sont les plasmons de surface ?

Les plasmons de surface sont des ondes électromagnétiques confinées à l’interface entre un métal et un diélectrique.

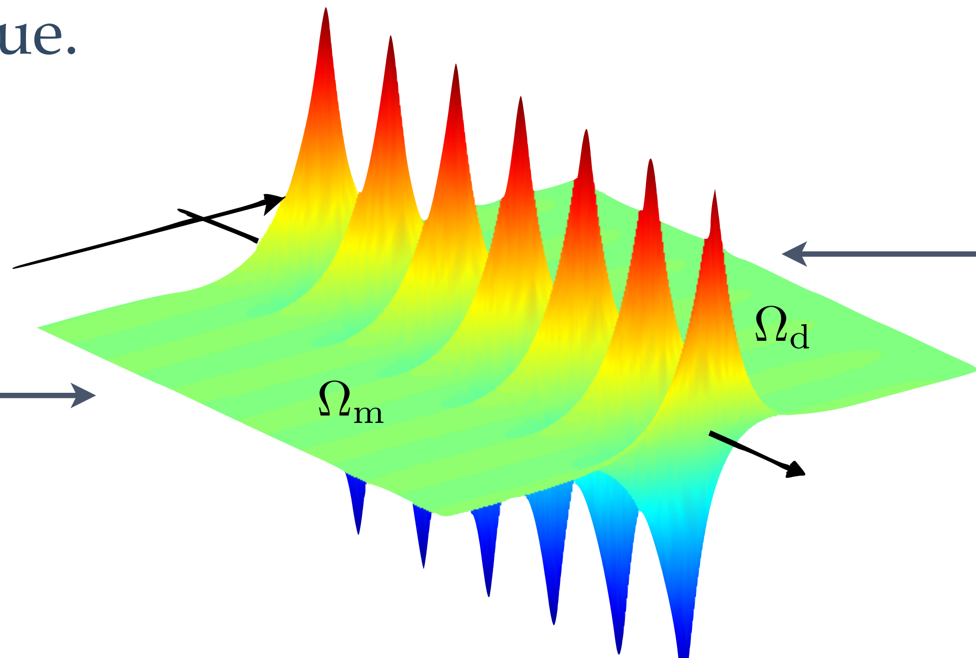


De telles ondes n’existent que lorsque la permittivité ou la perméabilité change de signe, ce qui est possible aux fréquences optiques.

Que sont les plasmons de surface ?

Les plasmons de surface sont des ondes électromagnétiques confinées à l'interface entre un métal et un diélectrique.

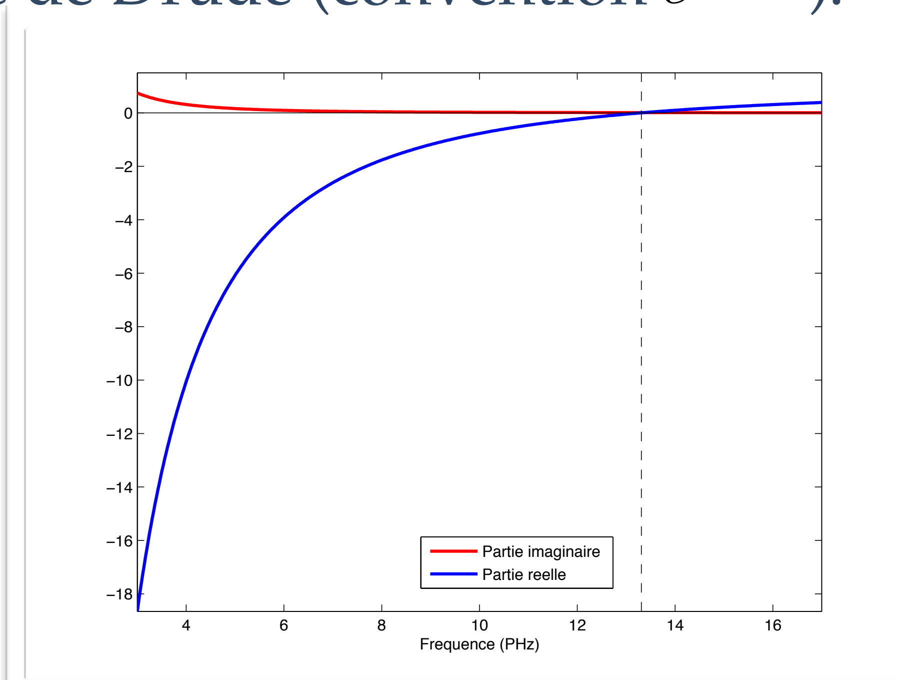
Métal
$\varepsilon < 0$
$\mu > 0$



Diélectrique
$\varepsilon > 0$
$\mu > 0$

De telles ondes n'existent que lorsque la permittivité ou la perméabilité change de signe, ce qui est possible aux fréquences optiques.
Un modèle simple de permittivité : la modèle de Drude (convention $e^{-i\omega t}$).

$$\boxed{\varepsilon = \varepsilon^{\gamma}(\omega) := 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\omega\gamma}}$$



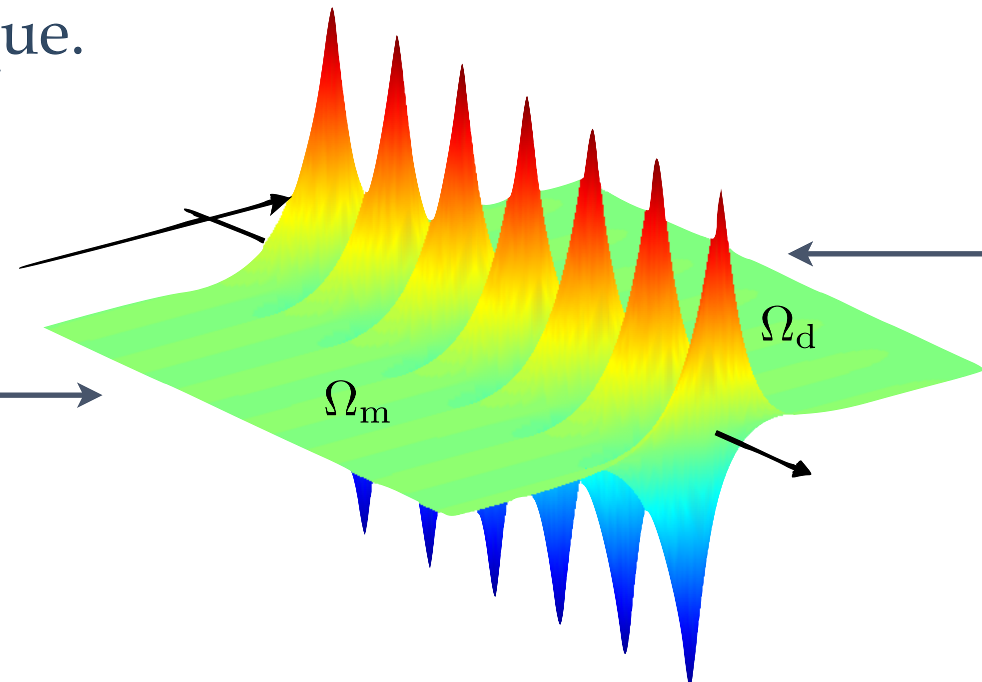
Que sont les plasmons de surface ?

Les plasmons de surface sont des ondes électromagnétiques confinées à l'interface entre un métal et un diélectrique.

Métal

$\varepsilon < 0$

$\mu > 0$



Diélectrique

$\varepsilon > 0$

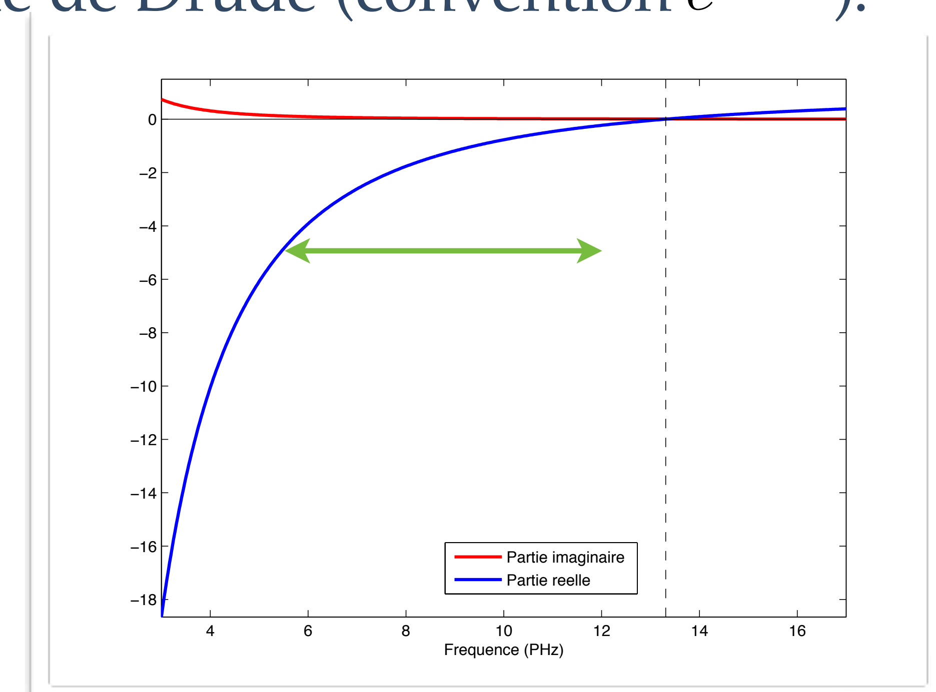
$\mu > 0$

De telles ondes n'existent que lorsque la permittivité ou la perméabilité change de signe, ce qui est possible aux fréquences optiques.

Un modèle simple de permittivité : la modèle de Drude (convention $e^{-i\omega t}$).

$$\boxed{\varepsilon = \varepsilon^{\gamma}(\omega) := 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\cancel{\omega\gamma}}}$$

Aux fréquences optiques ($\gamma \ll \omega < \omega_p$), ε possède une partie réelle négative et une partie imaginaire négligeable.



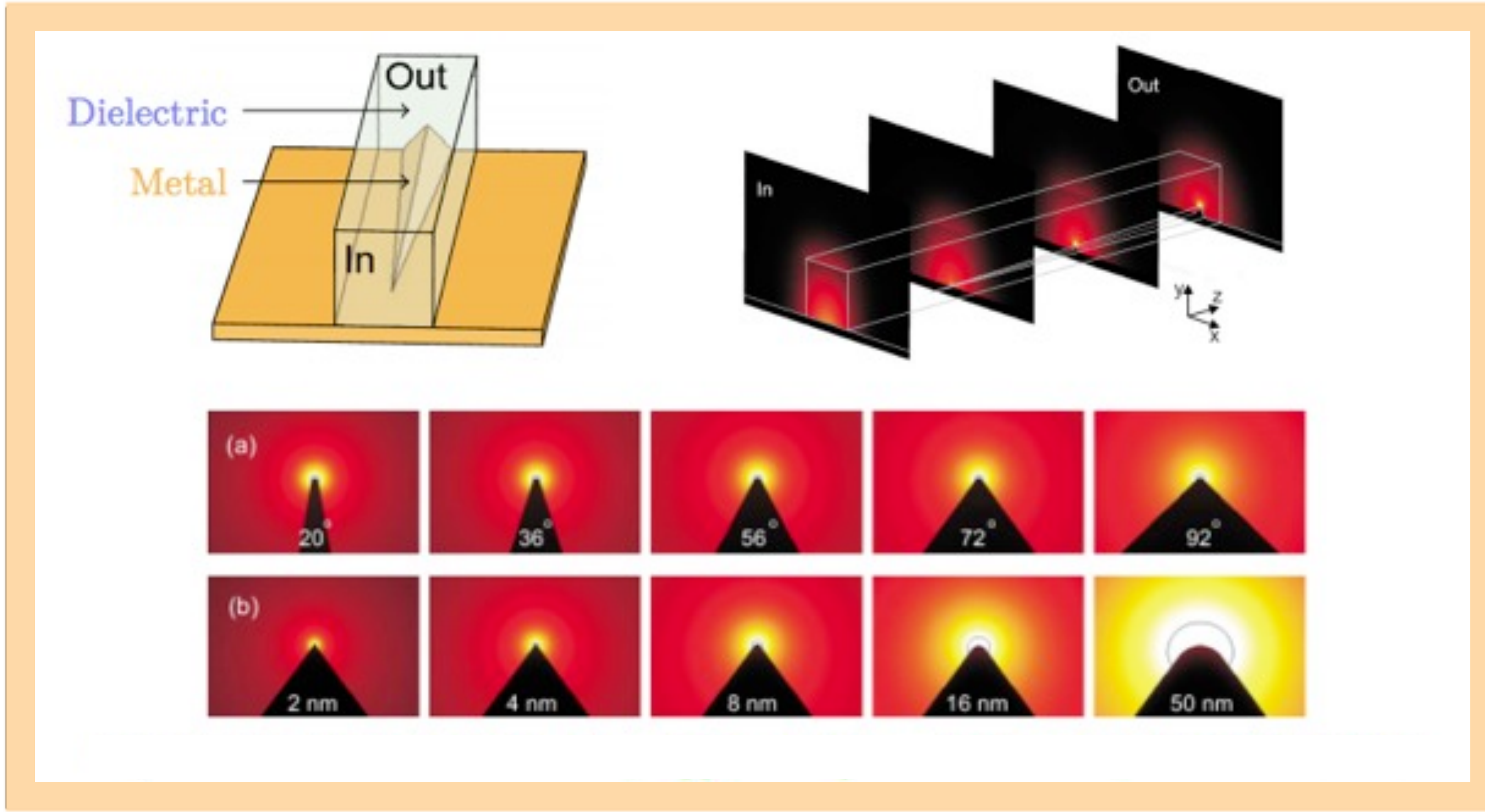
Applications

Applications

Le guidage des plasmons ou leur confinement dans les composants nanophotoniques suscitent un grand intérêt pour dépasser la limite de diffraction (antennes optiques, imagerie haute résolution en champ proche, ...).

Applications

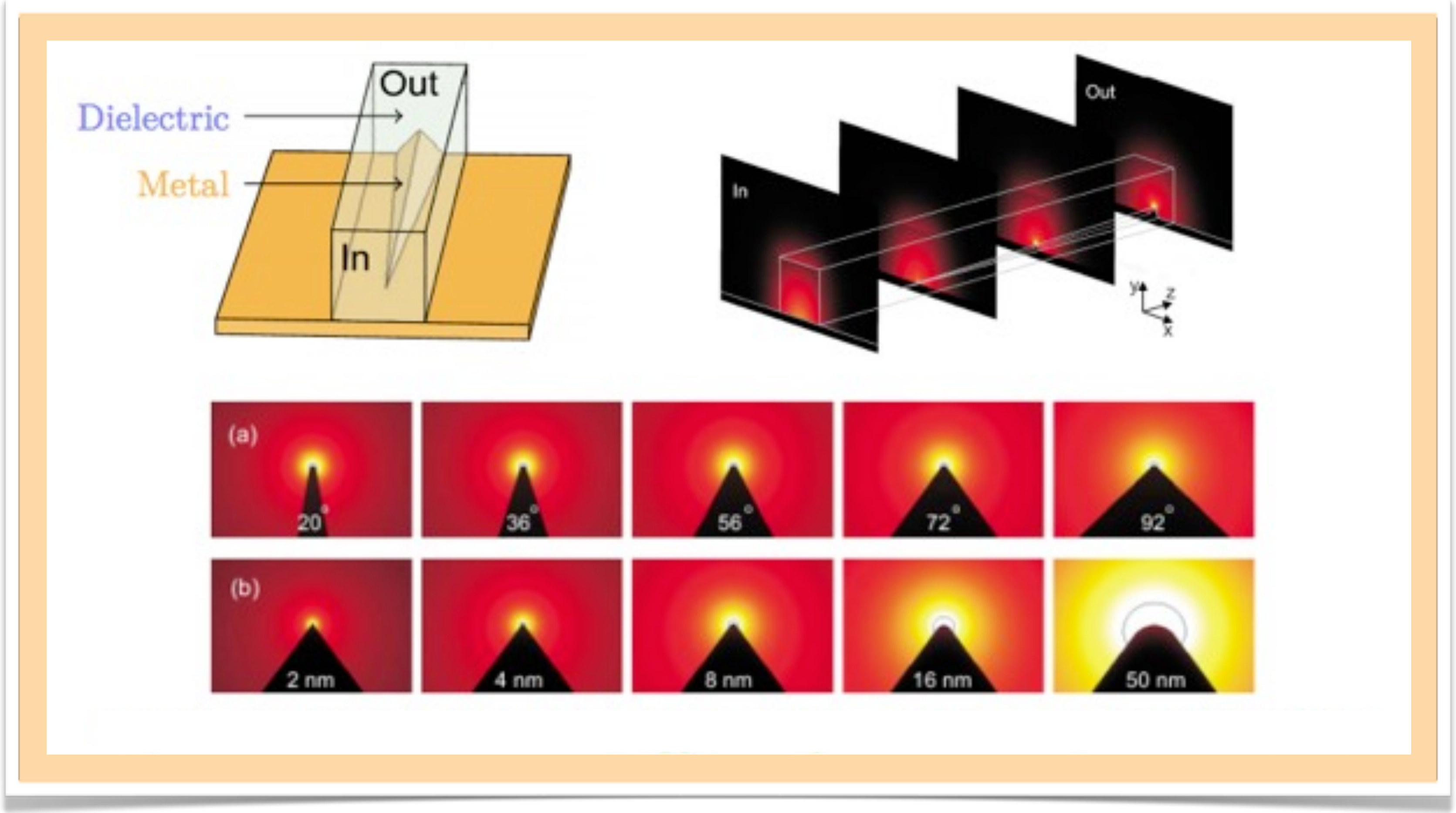
Le guidage des plasmons ou leur confinement dans les composants nanophotoniques suscitent un grand intérêt pour dépasser la limite de diffraction (antennes optiques, imagerie haute résolution en champ proche, ...).



O'Connor et al., (2009)

Applications

Le guidage des plasmons ou leur confinement dans les composants nanophotoniques suscitent un grand intérêt pour dépasser la limite de diffraction (antennes optiques, imagerie haute résolution en champ proche, ...).



O'Connor et al., (2009)

Cependant ces ondes sont très sensibles à la géométrie de l'interface entre les deux milieux.

Calcul explicite des plasmons de surface

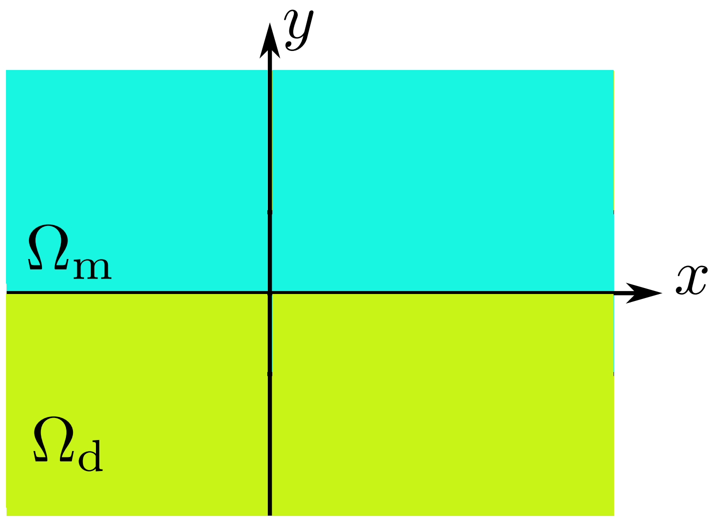
Calcul explicite des plasmons de surface

Dans des géométries simples, on peut obtenir l'expression des plasmons de surface.

Calcul explicite des plasmons de surface

Dans des géométries simples, on peut obtenir l'expression des plasmons de surface.

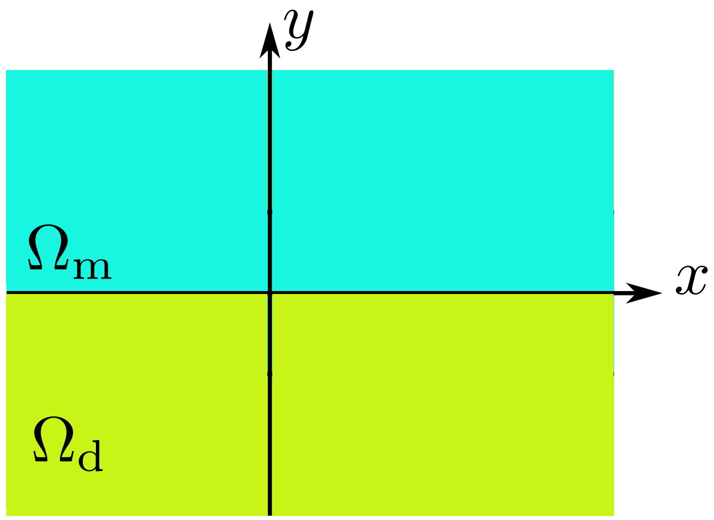
Pour un guide planaire 2D : une interface



Calcul explicite des plasmons de surface

Dans des géométries simples, on peut obtenir l'expression des plasmons de surface.

Pour un guide planaire 2D : une interface

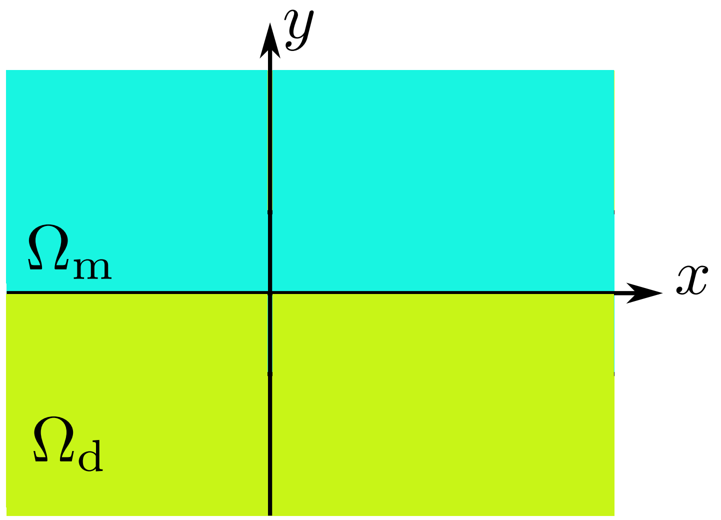


Les plasmons sont solutions des équations de Maxwell en régime harmonique, de la forme $H_z(y)e^{i\beta x}$, $E_z(y)e^{i\beta x}$, $\beta \in \mathbb{R}$

Calcul explicite des plasmons de surface

Dans des géométries simples, on peut obtenir l'expression des plasmons de surface.

Pour un guide planaire 2D : une interface



Les plasmons sont solutions des équations de Maxwell en régime harmonique, de la forme $H_z(y)e^{i\beta x}$, $E_z(y)e^{i\beta x}$, $\beta \in \mathbb{R}$

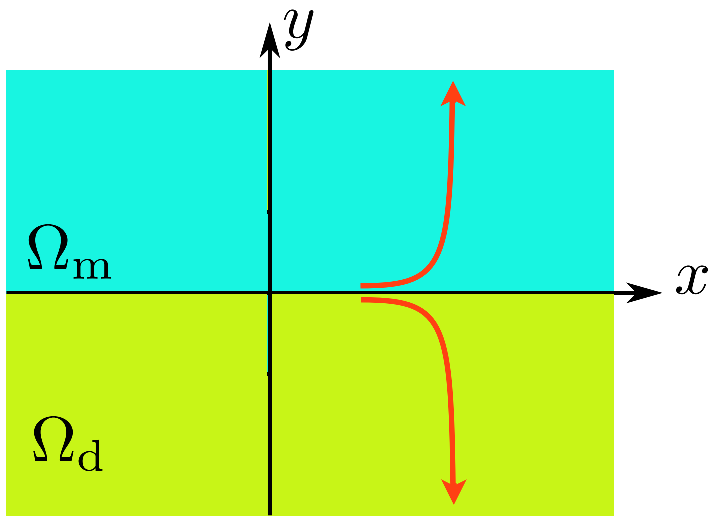
$$\frac{d}{dy}\left(\varepsilon^{-1}\frac{dH_z}{dy}\right) + (\frac{\omega^2}{c^2}\mu - \beta^2\varepsilon^{-1})H_z = 0$$

$$\frac{d}{dy}\left(\mu^{-1}\frac{dE_z}{dy}\right) + (\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon - \beta^2\mu^{-1})E_z = 0$$

Calcul explicite des plasmons de surface

Dans des géométries simples, on peut obtenir l'expression des plasmons de surface.

Pour un guide planaire 2D : une interface



Les plasmons sont solutions des équations de Maxwell en régime harmonique, de la forme $H_z(y)e^{i\beta x}$, $E_z(y)e^{i\beta x}$, $\beta \in \mathbb{R}$

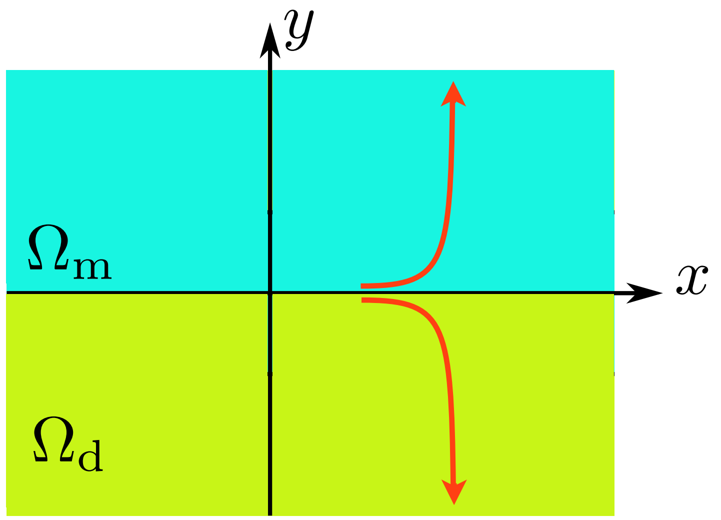
$$\frac{d}{dy}\left(\varepsilon^{-1}\frac{dH_z}{dy}\right) + (\frac{\omega^2}{c^2}\mu - \beta^2\varepsilon^{-1})H_z = 0$$

$$\frac{d}{dy}\left(\mu^{-1}\frac{dE_z}{dy}\right) + (\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon - \beta^2\mu^{-1})E_z = 0$$

Calcul explicite des plasmons de surface

Dans des géométries simples, on peut obtenir l'expression des plasmons de surface.

Pour un guide planaire 2D : une interface



Les plasmons sont solutions des équations de Maxwell en régime harmonique, de la forme $H_z(y)e^{i\beta x}$, $E_z(y)e^{i\beta x}$, $\beta \in \mathbb{R}$

$$\frac{d}{dy}\left(\varepsilon^{-1}\frac{dH_z}{dy}\right) + \left(\frac{\omega^2}{c^2}\mu - \beta^2\varepsilon^{-1}\right)H_z = 0$$

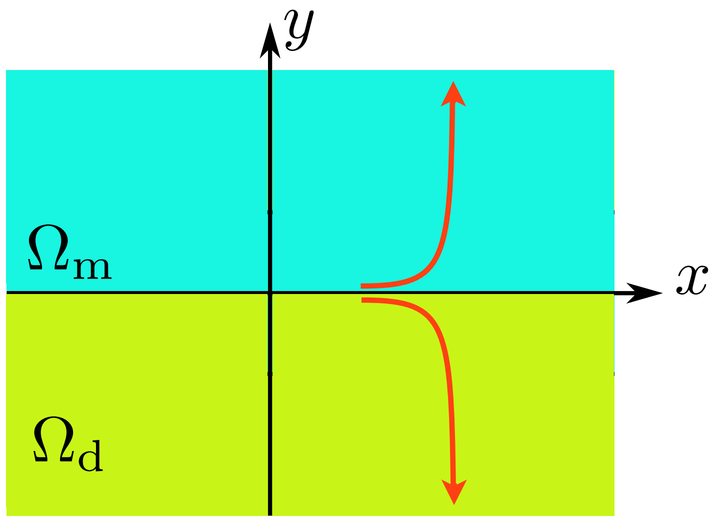
$$\frac{d}{dy}\left(\mu^{-1}\frac{dE_z}{dy}\right) + \left(\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon - \beta^2\mu^{-1}\right)E_z = 0$$

Ce qui permet l'existence des plasmons c'est le changement de signe dans la partie principale.

Calcul explicite des plasmons de surface

Dans des géométries simples, on peut obtenir l'expression des plasmons de surface.

Pour un guide planaire 2D : une interface

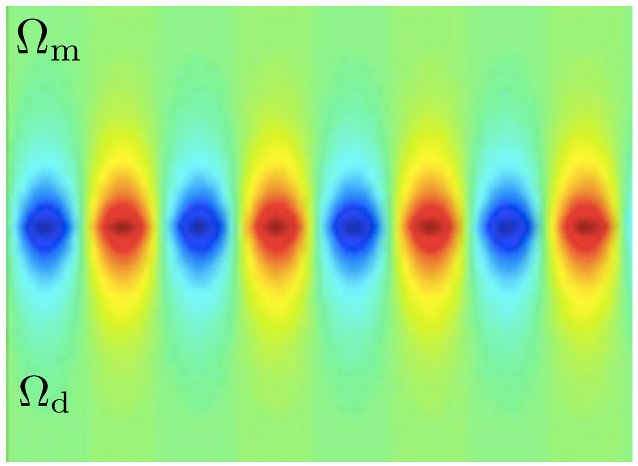


Les plasmons sont solutions des équations de Maxwell en régime harmonique, de la forme $H_z(y)e^{i\beta x}$, $E_z(y)e^{i\beta x}$, $\beta \in \mathbb{R}$

$$\frac{d}{dy}\left(\varepsilon^{-1}\frac{dH_z}{dy}\right) + \left(\frac{\omega^2}{c^2}\mu - \beta^2\varepsilon^{-1}\right)H_z = 0$$

$$\frac{d}{dy}\left(\mu^{-1}\frac{dE_z}{dy}\right) + \left(\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon - \beta^2\mu^{-1}\right)E_z = 0$$

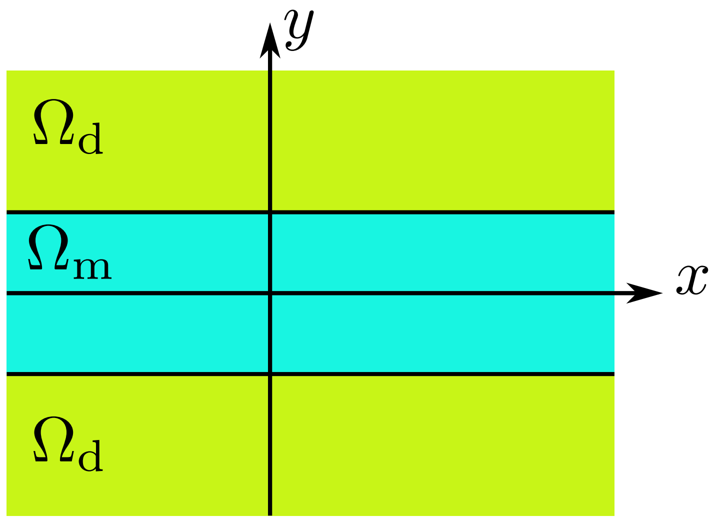
Ce qui permet l'existence des plasmons c'est le changement de signe dans la partie principale.



Calcul explicite des plasmons de surface

Dans des géométries simples, on peut obtenir l'expression des plasmons de surface.

Pour un guide planaire 2D : deux interfaces

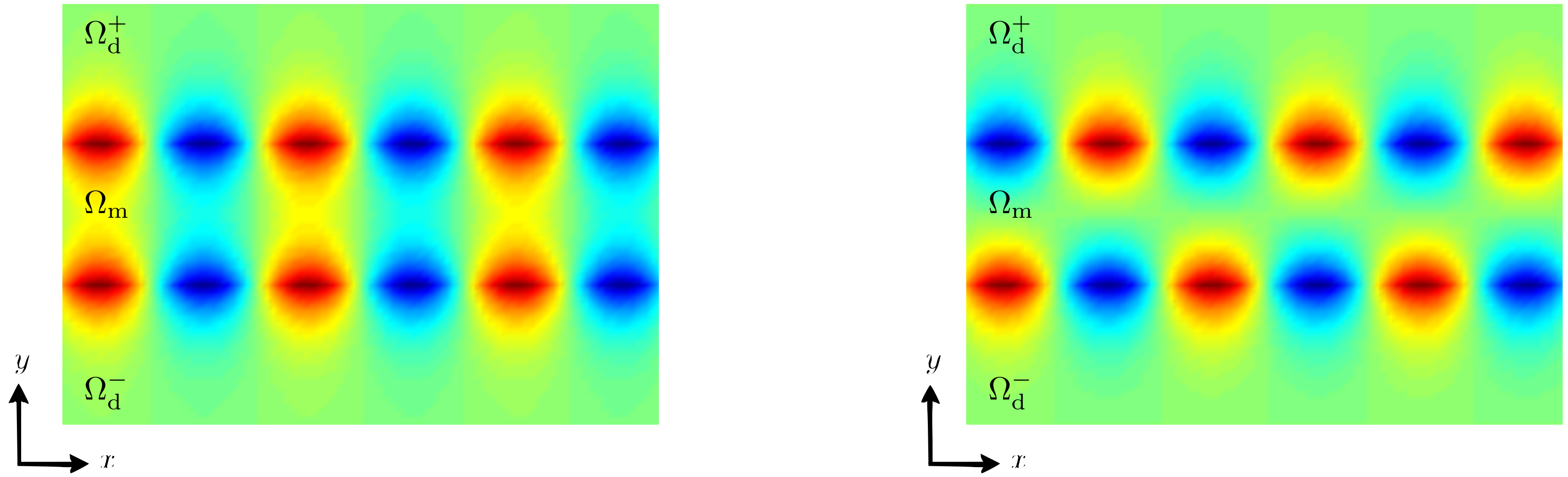


Les plasmons sont solutions des équations de Maxwell en régime harmonique, de la forme $H_z(y)e^{i\beta x}$, $E_z(y)e^{i\beta x}$, $\beta \in \mathbb{R}$

$$\frac{d}{dy}\left(\varepsilon^{-1}\frac{dH_z}{dy}\right) + \left(\frac{\omega^2}{c^2}\mu - \beta^2\varepsilon^{-1}\right)H_z = 0$$

$$\frac{d}{dy}\left(\mu^{-1}\frac{dE_z}{dy}\right) + \left(\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon - \beta^2\mu^{-1}\right)E_z = 0$$

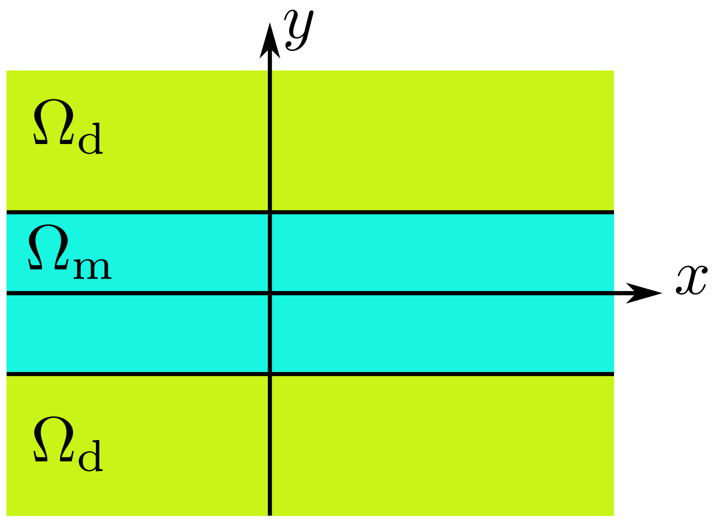
Ce qui permet l'existence des plasmons c'est le changement de signe dans la partie principale.



Calcul explicite des plasmons de surface

Dans des géométries simples, on peut obtenir l'expression des plasmons de surface.

Pour un guide planaire 2D : deux interfaces

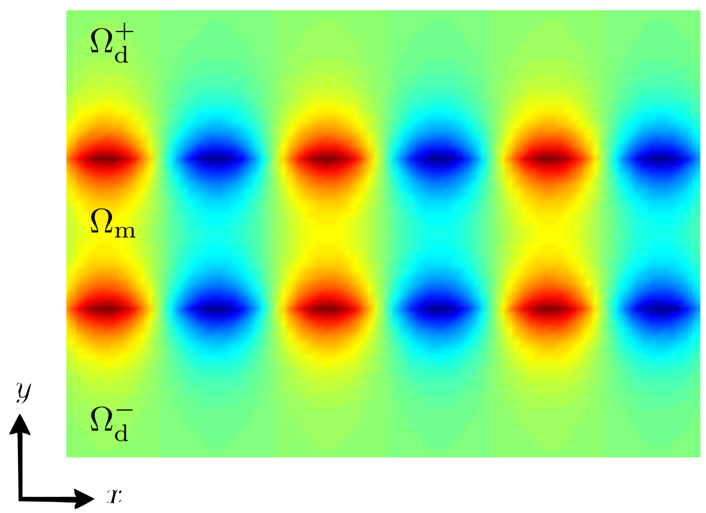


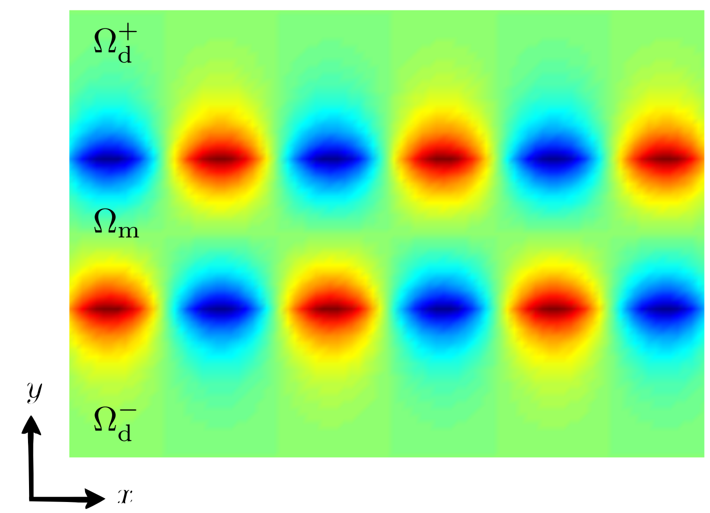
Les plasmons sont solutions des équations de Maxwell en régime harmonique, de la forme $H_z(y)e^{i\beta x}$, $E_z(y)e^{i\beta x}$, $\beta \in \mathbb{R}$

$$\frac{d}{dy}\left(\varepsilon^{-1}\frac{dH_z}{dy}\right) + \left(\frac{\omega^2}{c^2}\mu - \beta^2\varepsilon^{-1}\right)H_z = 0$$

$$\frac{d}{dy}\left(\mu^{-1}\frac{dE_z}{dy}\right) + \left(\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon - \beta^2\mu^{-1}\right)E_z = 0$$

Ce qui permet l'existence des plasmons c'est le changement de signe dans la partie principale.





Comment calculer les plasmons dans des géométries plus complexes ?

Les problèmes avec changement de signe

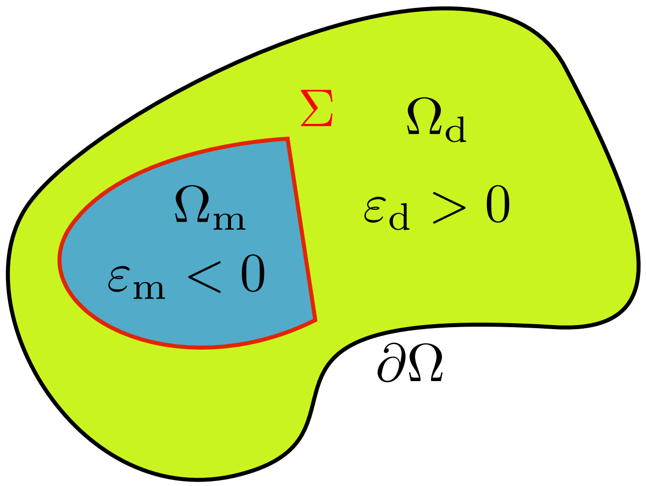
Les problèmes avec changement de signe

Les problèmes en plasmonique font partie des problèmes dits «avec changement de signe».

Les problèmes avec changement de signe

Les problèmes en plasmonique font partie des problèmes dits «avec changement de signe».

Exemple : problème de transmission 2D dans un domaine borné.

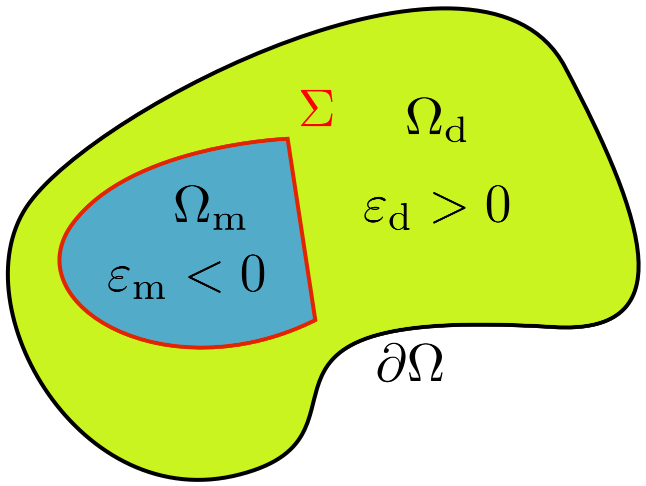


Les problèmes avec changement de signe

Les problèmes en plasmonique font partie des problèmes dits «avec changement de signe».

Exemple : problème de transmission 2D dans un domaine borné.

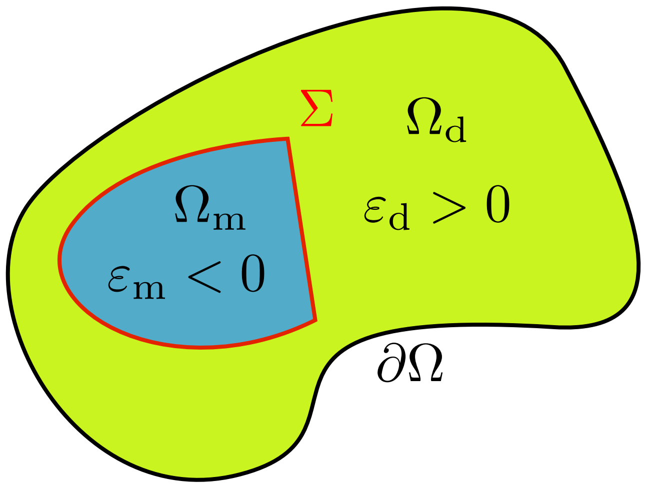
$$\left|\begin{array}{l}\text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que :}\\ \operatorname{div}(\varepsilon^{-1}\nabla u) + \omega^2 \mu u = -f \quad \text{dans } \Omega,\end{array}\right.$$



Les problèmes avec changement de signe

Les problèmes en plasmonique font partie des problèmes dits «avec changement de signe».

Exemple : problème de transmission 2D dans un domaine borné.



$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ \operatorname{div}(\varepsilon^{-1}\nabla u) + \omega^2 \mu u = -f \quad \text{dans } \Omega, \end{array} \right.$$

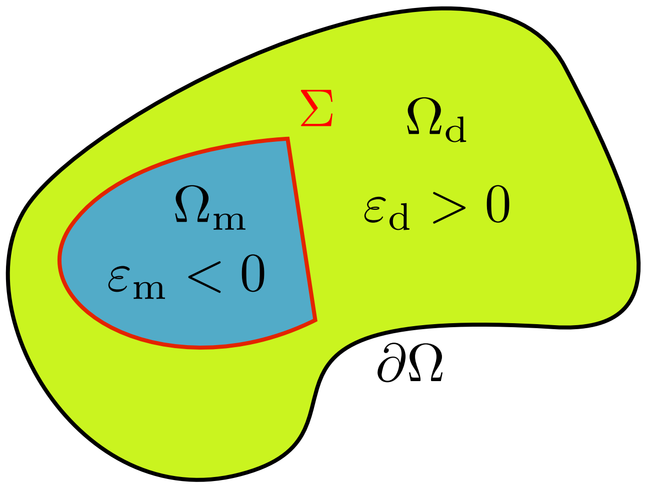
La formulation variationnelle associée s'écrit :

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ a(u,v) + c(u,v) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \\ a(u,v) = \displaystyle\int_\Omega \varepsilon^{-1} \nabla u \cdot \overline{\nabla v}, \quad c(u,v) = -\omega^2 \int_\Omega \mu u \overline{v}. \end{array} \right.$$

Les problèmes avec changement de signe

Les problèmes en plasmonique font partie des problèmes dits «avec changement de signe».

Exemple : problème de transmission 2D dans un domaine borné.



$$\left|\begin{array}{l}\text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que :}\\ \operatorname{div}(\varepsilon^{-1}\nabla u) + \omega^2 \mu u = -f \quad \text{dans } \Omega,\end{array}\right.$$

La formulation variationnelle associée s'écrit :

$$\left|\begin{array}{l}\text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que :}\\ a(u,v) + c(u,v) = \langle f, v\rangle \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),\\ a(u,v) = \displaystyle\int_\Omega \varepsilon^{-1}\nabla u \cdot \overline{\nabla v}, \quad c(u,v) = -\omega^2 \int_\Omega \mu u \overline{v}.\end{array}\right.$$

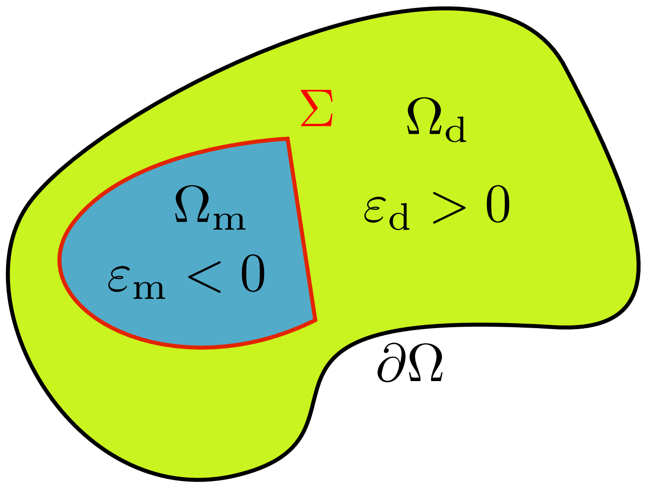
De façon classique, pour $\varepsilon > 0$:

$a(\cdot,\cdot)$ est coercive et $c(\cdot,\cdot)$ une perturbation compacte : problème de type Fredholm

Les problèmes avec changement de signe

Les problèmes en plasmonique font partie des problèmes dits «avec changement de signe».

Exemple : problème de transmission 2D dans un domaine borné.



$$\left|\begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ \operatorname{div}(\varepsilon^{-1}\nabla u) + \omega^2 \mu u = -f \quad \text{dans } \Omega, \end{array}\right.$$

La formulation variationnelle associée s'écrit :

$$\left|\begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ a(u,v) + c(u,v) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \\ a(u,v) = \displaystyle\int_\Omega \varepsilon^{-1}\nabla u \cdot \overline{\nabla v}, \quad c(u,v) = -\omega^2 \int_\Omega \mu u \overline{v}. \end{array}\right.$$

De façon classique, pour $\varepsilon > 0$:

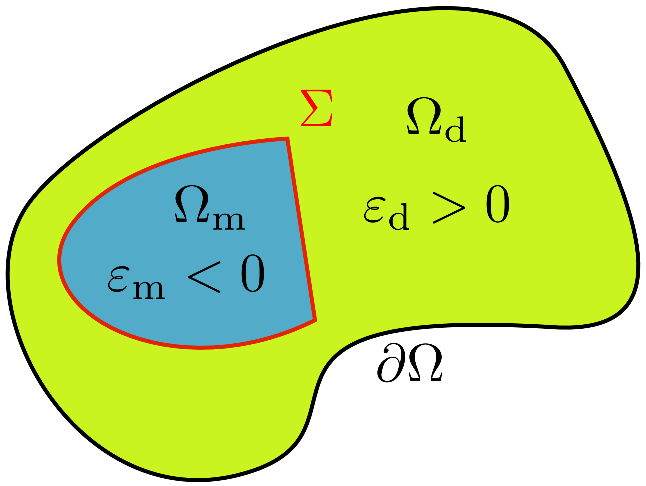
$a(\cdot,\cdot)$ est coercive et $c(\cdot,\cdot)$ une perturbation compacte : problème de type Fredholm

Lorsque ε change de signe la forme a n'est plus coercive !

Les problèmes avec changement de signe

Les problèmes en plasmonique font partie des problèmes dits «avec changement de signe».

Exemple : problème de transmission 2D dans un domaine borné.



$$\left|\begin{array}{l}\text{Trouver } u \in H^1_0(\Omega) \text{ tel que :}\\ \mathrm{div}(\varepsilon^{-1}\nabla u) + \omega^2 \mu u = -f \quad \text{dans } \Omega,\end{array}\right.$$

La formulation variationnelle associée s'écrit :

$$\left|\begin{array}{l}\text{Trouver } u \in H^1_0(\Omega) \text{ tel que :}\\ a(u,v) + c(u,v) = \langle f, v\rangle \quad \forall v \in H^1_0(\Omega),\\ a(u,v) = \displaystyle\int_\Omega \varepsilon^{-1}\nabla u \cdot \overline{\nabla v}, \quad c(u,v) = -\omega^2 \int_\Omega \mu u \overline{v}.\end{array}\right.$$

De façon classique, pour $\varepsilon > 0$:

$a(\cdot,\cdot)$ est coercive et $c(\cdot,\cdot)$ une perturbation compacte : problème de type Fredholm

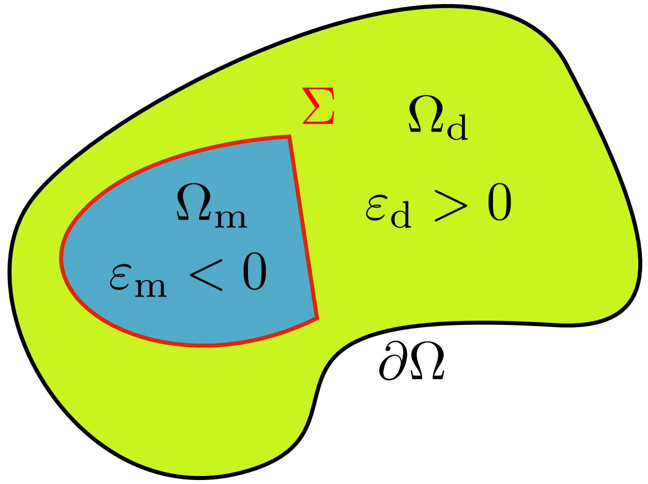
Lorsque ε change de signe la forme a n'est plus coercive !

Le problème peut être mal posé pour certaines valeurs du contraste $\kappa_\varepsilon := \dfrac{\varepsilon_{\mathrm{m}}}{\varepsilon_{\mathrm{d}}} < 0$.

La T-coercivité

$$\left|\begin{array}{l}\text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que :}\\ a(u,v) + c(u,v) = \langle f, v\rangle \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),\end{array}\right.$$

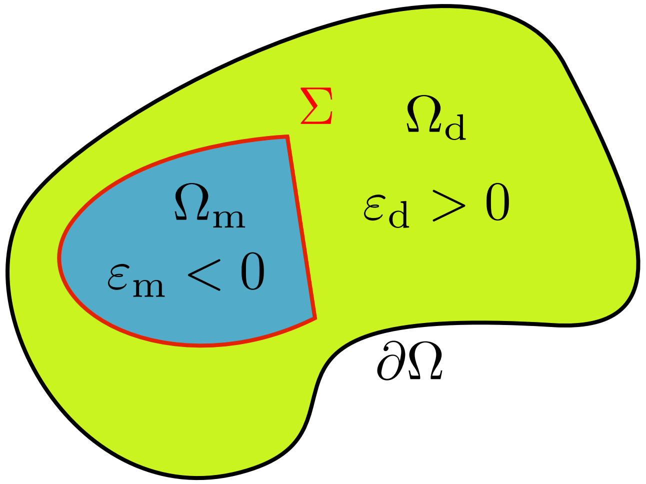
$$\kappa_\varepsilon := \frac{\varepsilon_{\mathrm{m}}}{\varepsilon_{\mathrm{d}}} < 0$$



La T-coercivité

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ a(u,v) + c(u,v) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \end{array} \right.$$

$$\kappa_\varepsilon := \frac{\varepsilon_{\mathrm{m}}}{\varepsilon_{\mathrm{d}}} < 0$$

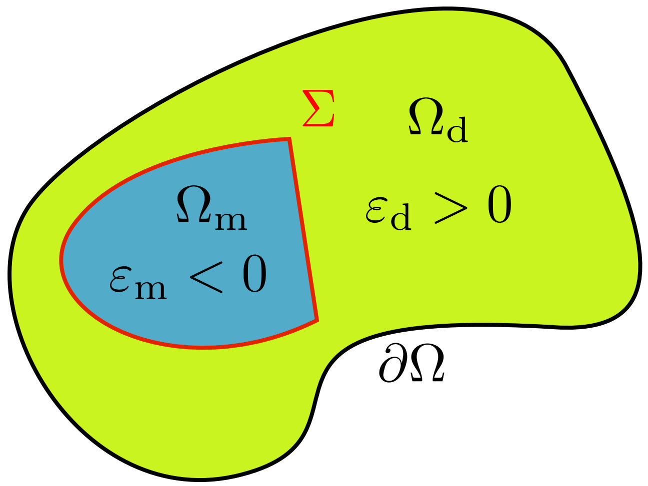


La T-coercivité permet de montrer le caractère Fredholm sous certaines conditions sur le contraste κ_ε et sur la géométrie de Σ.

La T-coercivité

$$\left|\begin{array}{l}\text{Trouver } u \in H^1_0(\Omega) \text{ tel que :}\\ a(u,v) + c(u,v) = \langle f, v\rangle \quad \forall v \in H^1_0(\Omega),\end{array}\right.$$

$$\kappa_\varepsilon := \frac{\varepsilon_{\mathrm{m}}}{\varepsilon_{\mathrm{d}}} < 0$$



La T-coercivité permet de montrer le caractère Fredholm sous certaines conditions sur le contraste κ_ε et sur la géométrie de Σ.

L'idée : construire un isomorphisme $\mathtt{T}$ de $H^1_0(\Omega)$ tel que le problème suivant soit coercif+compact

$$\left|\begin{array}{l}\text{Trouver } u \in H^1_0(\Omega) \text{ tel que :}\\ a(u,\mathtt{T}v) + c(u,\mathtt{T}v) = \langle f, \mathtt{T}v\rangle \quad \forall v \in H^1_0(\Omega),\end{array}\right.$$

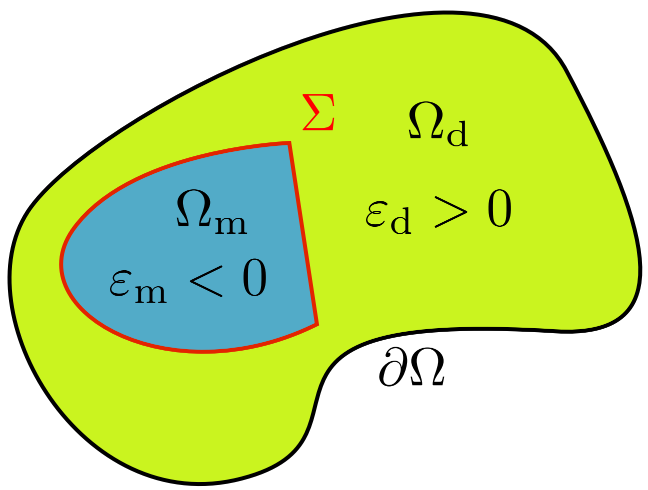
Formalisme introduit dans Zwölf (2008).

Étude complète dans Chesnel (2012) qui aboutit au résultat suivant :

La T-coercivité

$$\left|\begin{array}{l}\text{Trouver } u \in H^1_0(\Omega) \text{ tel que :}\\ a(u,v) + c(u,v) = \langle f, v\rangle \quad \forall v \in H^1_0(\Omega),\end{array}\right.$$

$$\kappa_\varepsilon := \frac{\varepsilon_{\mathrm{m}}}{\varepsilon_{\mathrm{d}}} < 0$$



La T-coercivité permet de montrer le caractère Fredholm sous certaines conditions sur le contraste κ_ε et sur la géométrie de Σ.

L'idée : construire un isomorphisme $\mathtt{T}$ de $H^1_0(\Omega)$ tel que le problème suivant soit coercif+compact

$$\left|\begin{array}{l}\text{Trouver } u \in H^1_0(\Omega) \text{ tel que :}\\ a(u,\mathtt{T}v) + c(u,\mathtt{T}v) = \langle f, \mathtt{T}v\rangle \quad \forall v \in H^1_0(\Omega),\end{array}\right.$$

Formalisme introduit dans Zwölf (2008).

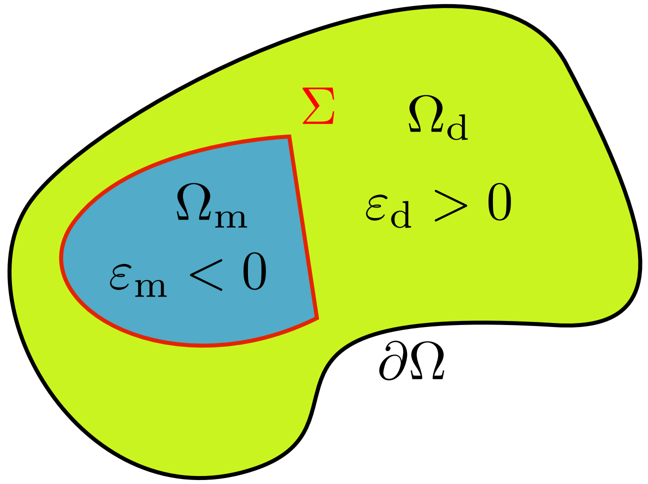
Étude complète dans Chesnel (2012) qui aboutit au résultat suivant :

Le problème est Fredholm si et seulement si $\kappa_\varepsilon \notin I_c$, I_c est appelé intervalle crtitique.

La T-coercivité

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ a(u,v) + c(u,v) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \end{array} \right.$$

$$\kappa_\varepsilon := \frac{\varepsilon_{\mathrm{m}}}{\varepsilon_{\mathrm{d}}} < 0$$



La T-coercivité permet de montrer le caractère Fredholm sous certaines conditions sur le contraste κ_ε et sur la géométrie de Σ.

L'idée : construire un isomorphisme $\mathtt{T}$ de $H_0^1(\Omega)$ tel que le problème suivant soit coercif+compact

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ a(u,\mathtt{T}v) + c(u,\mathtt{T}v) = \langle f, \mathtt{T}v \rangle \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \end{array} \right.$$

Formalisme introduit dans Zwölf (2008).

Étude complète dans Chesnel (2012) qui aboutit au résultat suivant :

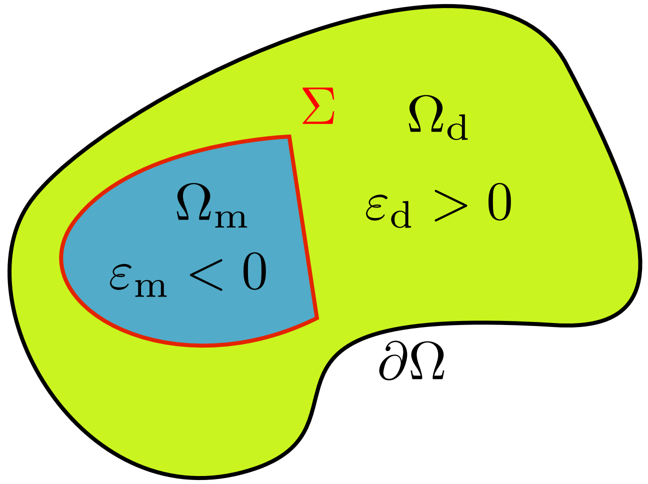
Le problème est Fredholm si et seulement si $\kappa_\varepsilon \notin I_c$, I_c est appelé intervalle crtitique.

I_c contient toujours $\{-1\}$.

La T-coercivité

$$\left|\begin{array}{l}\text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que :}\\ a(u,v) + c(u,v) = \langle f, v\rangle \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),\end{array}\right.$$

$$\kappa_\varepsilon := \frac{\varepsilon_{\mathrm{m}}}{\varepsilon_{\mathrm{d}}} < 0$$



La T-coercivité permet de montrer le caractère Fredholm sous certaines conditions sur le contraste κ_ε et sur la géométrie de Σ.

L'idée : construire un isomorphisme $\mathtt{T}$ de $H_0^1(\Omega)$ tel que le problème suivant soit coercif+compact

$$\left|\begin{array}{l}\text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que :}\\ a(u,\mathtt{T}v) + c(u,\mathtt{T}v) = \langle f, \mathtt{T}v\rangle \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),\end{array}\right.$$

Formalisme introduit dans Zwölf (2008).

Étude complète dans Chesnel (2012) qui aboutit au résultat suivant :

> Le problème est Fredholm si et seulement si $\kappa_\varepsilon \notin I_c$, I_c est appelé intervalle crtitique.

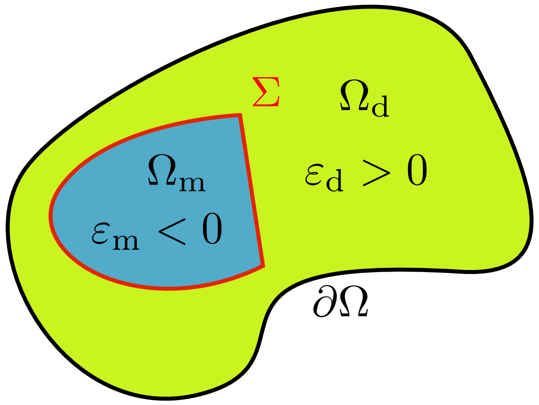
I_c contient toujours $\{-1\}$.

Cas $\kappa_\varepsilon = -1$ particulièrement problématique que nous n'abordons pas.

Ola (1995), Nguyen (2015).

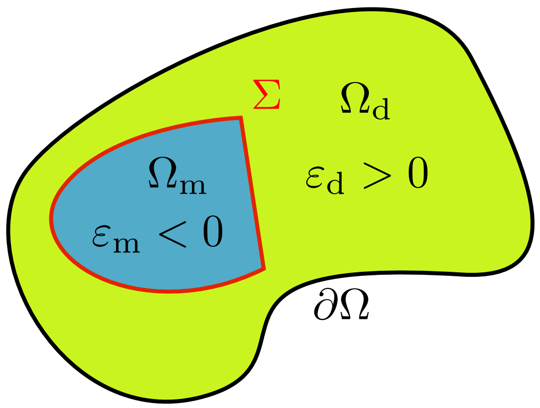
Résultats

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ \operatorname{div}(\varepsilon^{-1}\nabla u) + \omega^2 \mu u = -f \quad \text{dans } \Omega, \end{array} \right.$$



Résultats

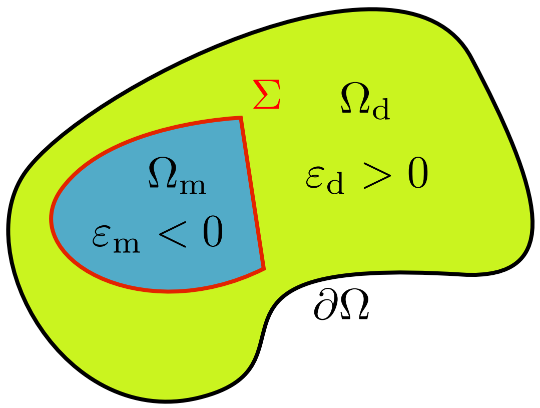
$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ \operatorname{div}(\varepsilon^{-1}\nabla u) + \omega^2 \mu u = -f \quad \text{dans } \Omega, \end{array} \right.$$



«Hors Intervalle critique» $\kappa_\varepsilon \notin I_c$

Résultats

$$\left|\begin{array}{l}\text{Trouver } u \in H^1_0(\Omega) \text{ tel que :}\\ \operatorname{div}(\varepsilon^{-1}\nabla u) + \omega^2 \mu u = -f \quad \text{dans } \Omega,\end{array}\right.$$



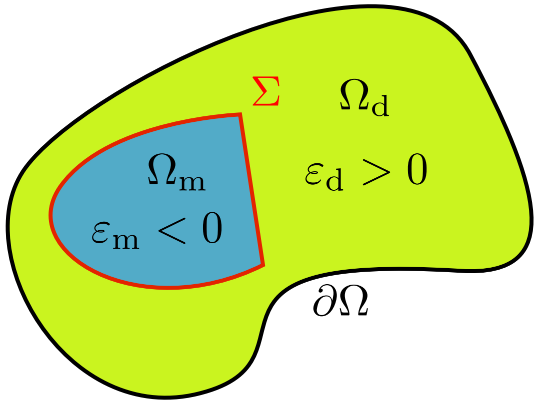
«Hors Intervalle critique» $\kappa_\varepsilon \notin I_c$

Le problème est de type Fredholm. Caractérisation de I_c pour toute configuration 2D.

Bonnet-Ben Dhia, Chesnel et Ciarlet (2012).

Résultats

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ \operatorname{div}(\varepsilon^{-1}\nabla u) + \omega^2 \mu u = -f \quad \text{dans } \Omega, \end{array} \right.$$



«Hors Intervalle critique» $\kappa_\varepsilon \notin I_c$

Le problème est de type Fredholm. Caractérisation de I_c pour toute configuration 2D.

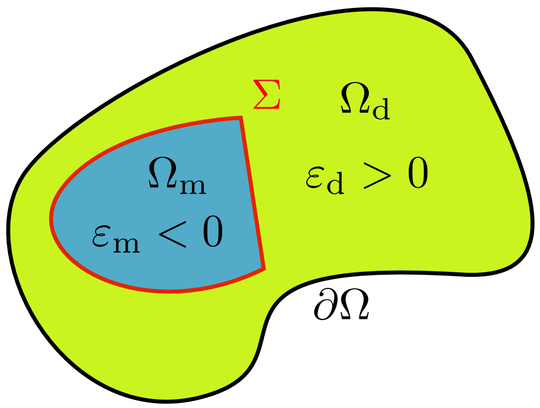
Bonnet-Ben Dhia, Chesnel et Ciarlet (2012).

Conditions sur le maillage impliquant la convergence des méthodes éléments finis.

Bonnet-Ben Dhia, Ciarlet et Zwölf (2010), Nicaise et Venel (2011), Chesnel et Ciarlet (2013).

Résultats

$$\left|\begin{array}{l}\text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que :}\\ \operatorname{div}(\varepsilon^{-1}\nabla u) + \omega^2 \mu u = -f \quad \text{dans } \Omega,\end{array}\right.$$



«Hors Intervalle critique» $\kappa_\varepsilon \notin I_c$

Le problème est de type Fredholm. Caractérisation de I_c pour toute configuration 2D.

Bonnet-Ben Dhia, Chesnel et Ciarlet (2012).

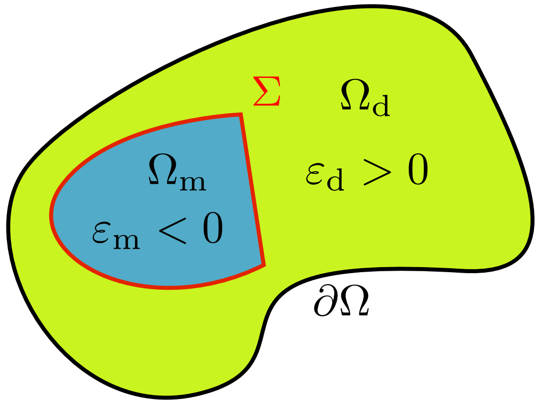
Conditions sur le maillage impliquant la convergence des méthodes éléments finis.

Bonnet-Ben Dhia, Ciarlet et Zwölf (2010), Nicaise et Venel (2011), Chesnel et Ciarlet (2013).

Résultats non optimaux sur la discrétisation dans le cas des coins.

Résultats

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H^1_0(\Omega) \text{ tel que :} \\ \mathrm{div}(\varepsilon^{-1}\nabla u) + \omega^2 \mu u = -f \quad \text{dans } \Omega, \end{array} \right.$$



«Hors Intervalle critique» $\kappa_\varepsilon \notin I_c$

Le problème est de type Fredholm. Caractérisation de I_c pour toute configuration 2D.

Bonnet-Ben Dhia, Chesnel et Ciarlet (2012).

Conditions sur le maillage impliquant la convergence des méthodes éléments finis.

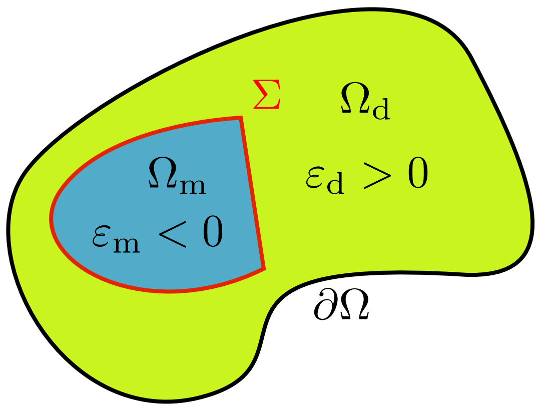
Bonnet-Ben Dhia, Ciarlet et Zwölf (2010), Nicaise et Venel (2011), Chesnel et Ciarlet (2013).

Résultats non optimaux sur la discrétisation dans le cas des coins.

«Dans l'Intervalle critique» $\kappa_\varepsilon \in I_c$

Résultats

$$\left|\begin{array}{l}\text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que :}\\ \mathrm{div}(\varepsilon^{-1}\nabla u) + \omega^2 \mu u = -f \quad \text{dans } \Omega,\end{array}\right.$$



«Hors Intervalle critique» $\kappa_\varepsilon \notin I_c$

Le problème est de type Fredholm. Caractérisation de I_c pour toute configuration 2D.

Bonnet-Ben Dhia, Chesnel et Ciarlet (2012).

Conditions sur le maillage impliquant la convergence des méthodes éléments finis.

Bonnet-Ben Dhia, Ciarlet et Zwölf (2010), Nicaise et Venel (2011), Chesnel et Ciarlet (2013).

Résultats non optimaux sur la discrétisation dans le cas des coins.

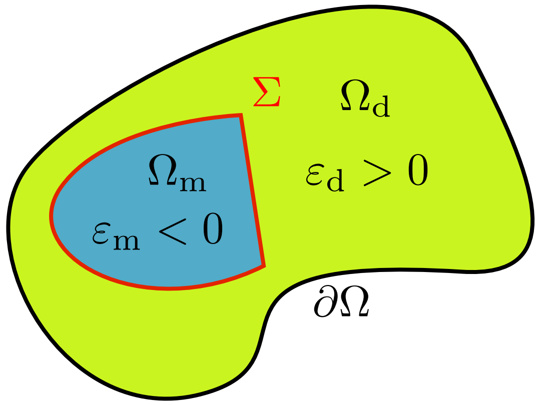
«Dans l'Intervalle critique» $\kappa_\varepsilon \in I_c$

Le problème n'est pas Fredholm à cause de singularités hyper oscillantes aux coins. Cadre Fredholm retrouvé dans un nouveau cadre fonctionnel prenant en compte les singularités.

Bonnet-Ben Dhia, Dauge et Ramdani (1999), Bonnet-Ben Dhia, Chesnel et Claeys (2013).

Résultats

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ \operatorname{div}(\varepsilon^{-1}\nabla u) + \omega^2 \mu u = -f \quad \text{dans } \Omega, \end{array} \right.$$



«Hors Intervalle critique» $\kappa_\varepsilon \notin I_c$

Le problème est de type Fredholm. Caractérisation de I_c pour toute configuration 2D.

Bonnet-Ben Dhia, Chesnel et Ciarlet (2012).

Conditions sur le maillage impliquant la convergence des méthodes éléments finis.

Bonnet-Ben Dhia, Ciarlet et Zwölf (2010), Nicaise et Venel (2011), Chesnel et Ciarlet (2013).

Résultats non optimaux sur la discrétisation dans le cas des coins.

«Dans l'Intervalle critique» $\kappa_\varepsilon \in I_c$

Le problème n'est pas Fredholm à cause de singularités hyper oscillantes aux coins. Cadre Fredholm retrouvé dans un nouveau cadre fonctionnel prenant en compte les singularités.

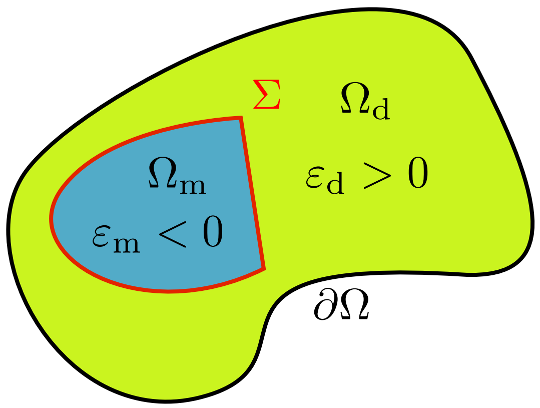
Bonnet-Ben Dhia, Dauge et Ramdani (1999), Bonnet-Ben Dhia, Chesnel et Claeys (2013).

Pas de convergence des méthodes Éléments Finis.

Résultats

Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que :

$$\mathrm{div}(\varepsilon^{-1}\nabla u) + \omega^2 \mu u = -f \quad \text{dans } \Omega,$$



«Hors Intervalle critique» $\kappa_\varepsilon \notin I_c$

Le problème est de type Fredholm. Caractérisation de I_c pour toute configuration 2D.

Bonnet-Ben Dhia, Chesnel et Ciarlet (2012).

Conditions sur le maillage impliquant la convergence des méthodes éléments finis.

Bonnet-Ben Dhia, Ciarl … rlet (2013).

Résultats non optima … s.

Méthode numérique lorsque l'interface présente des coins ?

«Dans l'Intervalle cri …

Le problème n'est pas … scillantes aux coins.
Cadre Fredholm retrouvé dans un nouveau cadre fonctionnel prenant en compte les singularités.

Bonnet-Ben Dhia, Dauge et Ramdani (1999), Bonnet-Ben Dhia, Chesnel et Claeys (2013).

Pas de convergence des méthodes Éléments Finis.

Objectifs de la thèse

Objectifs de la thèse

Développer une méthode numérique adaptée lorsque l'interface présente des coins.

Objectifs de la thèse

Développer une méthode numérique adaptée lorsque l'interface présente des coins.

Cas «Hors Intervalle Critique»

Objectifs de la thèse

Développer une méthode numérique adaptée lorsque l'interface présente des coins.

Cas «Hors Intervalle Critique»

Cas «Dans l'Intervalle Critique»

Objectifs de la thèse

Développer une méthode numérique adaptée lorsque l'interface présente des coins.

Cas «Hors Intervalle Critique»

Cas «Dans l'Intervalle Critique»

Application à deux problèmes physiques

Objectifs de la thèse

Développer une méthode numérique adaptée lorsque l'interface présente des coins.

Cas «Hors Intervalle Critique»

Pour avoir la convergence des méthodes éléments finis, il faut assurer la T-coercivité au niveau discret (peut se faire par une conformité des maillages). (extensions de Nicaise et Venel (2011), et Chesnel et Ciarlet (2013)).

Cas «Dans l'Intervalle Critique»

Application à deux problèmes physiques

Objectifs de la thèse

Développer une méthode numérique adaptée lorsque l’interface présente des coins.

Cas «Hors Intervalle Critique»

Pour avoir la convergence des méthodes éléments finis, il faut assurer la T-coercivité au niveau discret (peut se faire par une conformité des maillages). (extensions de Nicaise et Venel (2011), et Chesnel et Ciarlet (2013)).

Chapitre 2

Cas «Dans l’Intervalle Critique»

Application à deux problèmes physiques

Objectifs de la thèse

Développer une méthode numérique adaptée lorsque l'interface présente des coins.

Cas «Hors Intervalle Critique»

Pour avoir la convergence des méthodes éléments finis, il faut assurer la T-coercivité au niveau discret (peut se faire par une conformité des maillages). (extensions de Nicaise et Venel (2011), et Chesnel et Ciarlet (2013)).

Chapitre 2

Cas «Dans l'Intervalle Critique»

Transformer le voisinage des coins en domaine non borné pour donner un critère de sélection de la singularité hyper oscillante sortante, et proposer une méthode numérique à base d'éléments finis.
(extensions de Bonnet-Ben Dhia, Chesnel, Claeys (2013), et Chesnel (2012)).

Application à deux problèmes physiques

Objectifs de la thèse

Développer une méthode numérique adaptée lorsque l'interface présente des coins.

Cas «Hors Intervalle Critique»

Pour avoir la convergence des méthodes éléments finis, il faut assurer la T-coercivité au niveau discret (peut se faire par une conformité des maillages). (extensions de Nicaise et Venel (2011), et Chesnel et Ciarlet (2013)).

Chapitre 2

Cas «Dans l'Intervalle Critique»

Transformer le voisinage des coins en domaine non borné pour donner un critère de sélection de la singularité hyper oscillante sortante, et proposer une méthode numérique à base d'éléments finis.
(extensions de Bonnet-Ben Dhia, Chesnel, Claeys (2013), et Chesnel (2012)).

Chapitre 3

Application à deux problèmes physiques

Objectifs de la thèse

Développer une méthode numérique adaptée lorsque l'interface présente des coins.

Cas «Hors Intervalle Critique»

Pour avoir la convergence des méthodes éléments finis, il faut assurer la T-coercivité au niveau discret (peut se faire par une conformité des maillages). (extensions de Nicaise et Venel (2011), et Chesnel et Ciarlet (2013)).

Chapitre 2

Cas «Dans l'Intervalle Critique»

Transformer le voisinage des coins en domaine non borné pour donner un critère de sélection de la singularité hyper oscillante sortante, et proposer une méthode numérique à base d'éléments finis.
(extensions de Bonnet-Ben Dhia, Chesnel, Claeys (2013), et Chesnel (2012)).

Chapitre 3

Application à deux problèmes physiques

1) La diffraction d'une onde plane par une inclusion métallique polygonale.
2) L'étude de modes guidés dans un guide d'ondes plasmonique.
(extensions de Ramdani (1999)).

Objectifs de la thèse

Développer une méthode numérique adaptée lorsque l'interface présente des coins.

Cas «Hors Intervalle Critique»

Pour avoir la convergence des méthodes éléments finis, il faut assurer la T-coercivité au niveau discret (peut se faire par une conformité des maillages). (extensions de Nicaise et Venel (2011), et Chesnel et Ciarlet (2013)).

Chapitre 2

Cas «Dans l'Intervalle Critique»

Transformer le voisinage des coins en domaine non borné pour donner un critère de sélection de la singularité hyper oscillante sortante, et proposer une méthode numérique à base d'éléments finis.
(extensions de Bonnet-Ben Dhia, Chesnel, Claeys (2013), et Chesnel (2012)).

Chapitre 3

Application à deux problèmes physiques

1) La diffraction d'une onde plane par une inclusion métallique polygonale. Chapitre 3
2) L'étude de modes guidés dans un guide d'ondes plasmonique. Chapitres 4,5
(extensions de Ramdani (1999)).

Objectifs de la thèse

Développer une méthode numérique adaptée lorsque l'interface présente des coins.

Cas «Hors Intervalle Critique»

Pour avoir la convergence des méthodes éléments finis, il faut assurer la T-coercivité au niveau discret (peut se faire par une conformité des maillages). (extensions de Nicaise et Venel (2011), et Chesnel et Ciarlet (2013)).

Chapitre 2

Cas «Dans l'Intervalle Critique»

Transformer le voisinage des coins en domaine non borné pour donner un critère de sélection de la singularité hyper oscillante sortante, et proposer une méthode numérique à base d'éléments finis.
(extensions de Bonnet-Ben Dhia, Chesnel, Claeys (2013), et Chesnel (2012)).

Chapitre 3

Application à deux problèmes physiques

1) La diffraction d'une onde plane par une inclusion métallique polygonale. — Chapitre 3
2) L'étude de modes guidés dans un guide d'ondes plasmonique. — Chapitres 4,5
(extensions de Ramdani (1999)).

Objectifs de la thèse

Développer une méthode numérique adaptée lorsque l'interface présente des coins.

Cas «Hors Intervalle Critique»

Pour avoir la convergence des méthodes éléments finis, il faut assurer la T-coercivité au niveau discret (peut se faire par une conformité des maillages). (extensions de Nicaise et Venel (2011), et Chesnel et Ciarlet (2013)).

Chapitre 2

Cas «Dans l'Intervalle Critique»

Transformer le voisinage des coins en domaine non borné pour donner un critère de sélection de la singularité hyper oscillante sortante, et proposer une méthode numérique à base d'éléments finis.
(extensions de Bonnet-Ben Dhia, Chesnel, Claeys (2013), et Chesnel (2012)).

Chapitre 3

Application à deux problèmes physiques

1) La diffraction d'une onde plane par une inclusion métallique polygonale.
2) L'étude de modes guidés dans un guide d'ondes plasmonique.
(extensions de Ramdani (1999)).

Chapitre 3
Chapitres 4,5

Sommaire

- Partie I : règles de maillage pour les coins dans le cas $\kappa_\varepsilon \notin I_c$
- Partie II : le guide d'ondes plasmonique scalaire
  - Étude hors intervalle critique
  - Étude dans l'intervalle critique
- Perspectives

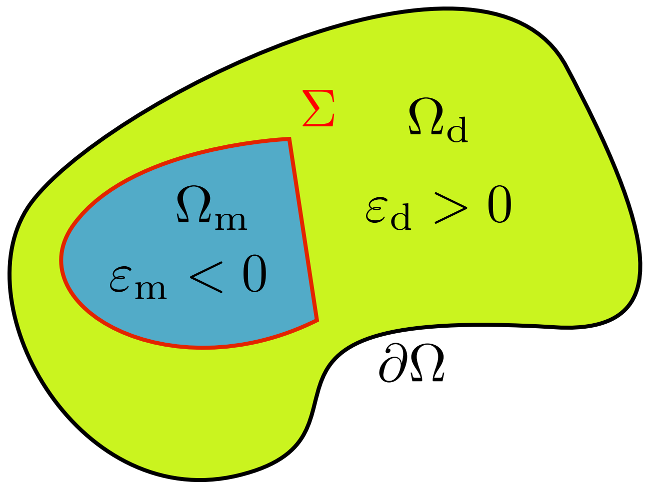
Sommaire

- Partie I : règles de maillage pour les coins dans le cas $\kappa_\varepsilon \notin I_c$

Problème de transmission et T-coercivité

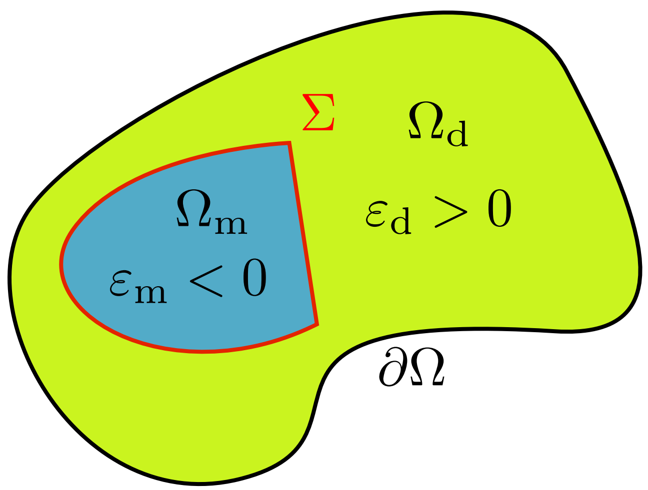
But : construire un isomorphisme T de $H_0^1(\Omega)$ tel que la forme a soit T-coercive : $\forall u \in H_0^1(\Omega)$

$$\boxed{a(u, \mathtt{T}u) \geq C\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} \quad \text{avec} \quad a(u,v) = \int_\Omega \varepsilon^{-1}\nabla u \cdot \overline{\nabla v}}$$



Problème de transmission et T-coercivité

But : construire un isomorphisme $\mathtt{T}$ de $H^1_0(\Omega)$ tel que la forme a soit T-coercive : $\forall u \in H^1_0(\Omega)$



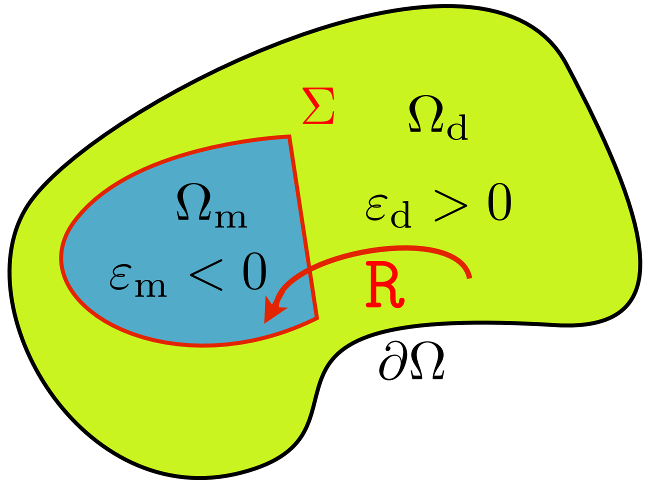
$$\boxed{a(u, \mathtt{T}u) \geq C\|u\|^2_{H^1_0(\Omega)} \quad \text{avec} \quad a(u,v) = \int_\Omega \varepsilon^{-1} \nabla u \cdot \overline{\nabla v}}$$

1) compenser le changement de signe de ε

$$\mathtt{T}u = \begin{cases} u_{\mathrm{d}} & \text{dans } \Omega_{\mathrm{d}} \\ -u_{\mathrm{m}} + \quad \ldots & \text{dans } \Omega_{\mathrm{m}} \end{cases}$$

Problème de transmission et T-coercivité

But : construire un isomorphisme $\mathtt{T}$ de $H_0^1(\Omega)$ tel que la forme a soit $\mathtt{T}$-coercive : $\forall u \in H_0^1(\Omega)$



$$\boxed{a(u, \mathtt{T}u) \geq C\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} \quad \text{avec} \quad a(u,v) = \int_\Omega \varepsilon^{-1}\nabla u \cdot \overline{\nabla v}}$$

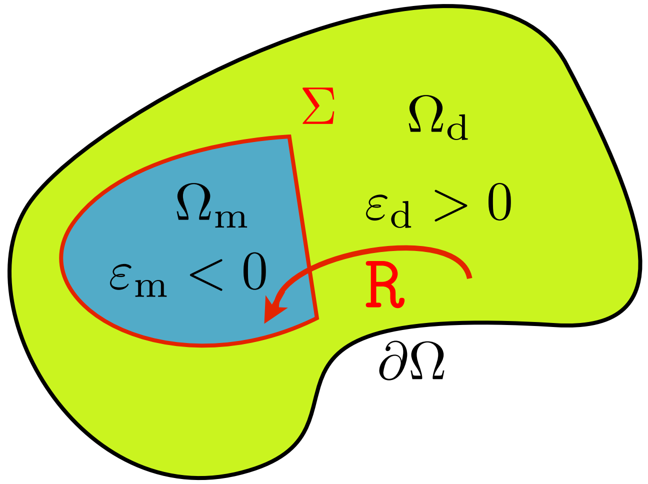
1) compenser le changement de signe de ε

2) assurer le raccord avec un opérateur de transfert $\mathtt{R}$

$$\mathtt{T}u = \begin{cases} u_\mathrm{d} & \text{dans } \Omega_\mathrm{d} \\ -u_\mathrm{m} + 2\mathtt{R}u_\mathrm{d} & \text{dans } \Omega_\mathrm{m} \end{cases}$$

Problème de transmission et T-coercivité

But : construire un isomorphisme $\mathtt{T}$ de $H_0^1(\Omega)$ tel que la forme a soit $\mathtt{T}$-coercive : $\forall u \in H_0^1(\Omega)$



$$\boxed{a(u, \mathtt{T}u) \geq C\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} \quad \text{avec} \quad a(u,v) = \int_\Omega \varepsilon^{-1}\nabla u \cdot \overline{\nabla v}}$$

1) compenser le changement de signe de ε

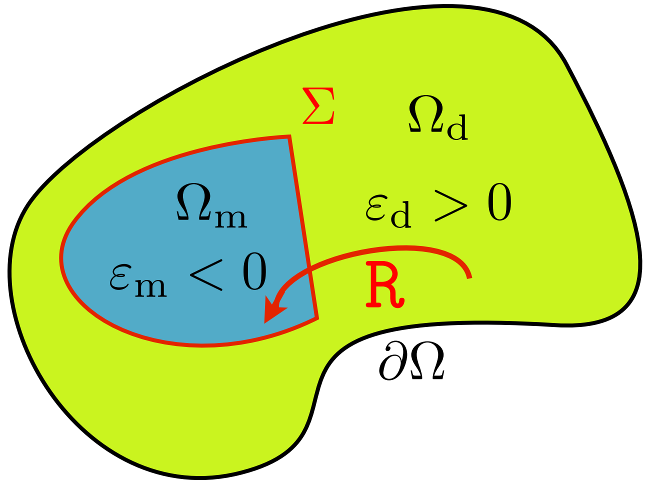
2) assurer le raccord avec un opérateur de transfert $\mathtt{R}$

$$\mathtt{T}u = \begin{cases} u_{\mathrm{d}} & \text{dans } \Omega_{\mathrm{d}} \\ -u_{\mathrm{m}} + 2\mathtt{R}u_{\mathrm{d}} & \text{dans } \Omega_{\mathrm{m}} \end{cases}$$

$\mathtt{R}$ est un opérateur linéaire continu de Ω_{d} dans Ω_{m} tel que $\mathtt{R}u|_\Sigma = u|_\Sigma$

Problème de transmission et T-coercivité

But : construire un isomorphisme $\mathtt{T}$ de $H^1_0(\Omega)$ tel que la forme a soit T-coercive : $\forall u \in H^1_0(\Omega)$



$$\boxed{a(u, \mathtt{T}u) \geq C\|u\|^2_{H^1_0(\Omega)} \quad \text{avec} \quad a(u,v) = \int_\Omega \varepsilon^{-1}\nabla u \cdot \overline{\nabla v}}$$

1) compenser le changement de signe de ε

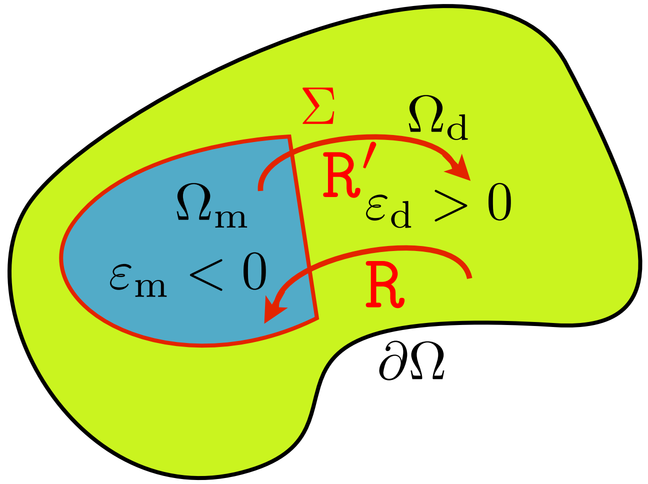
2) assurer le raccord avec un opérateur de transfert $\mathtt{R}$

$$\mathtt{T}u = \begin{cases} u_\mathrm{d} & \text{dans } \Omega_\mathrm{d} \\ -u_\mathrm{m} + 2\mathtt{R}u_\mathrm{d} & \text{dans } \Omega_\mathrm{m} \end{cases}$$

$\mathtt{R}$ est un opérateur linéaire continu de Ω_d dans Ω_m tel que $\mathtt{R}u|_\Sigma = u|_\Sigma$

$\mathtt{T} \circ \mathtt{T} = \mathrm{I}_d$ donc $\mathtt{T}$ est un isomorphisme de $H^1_0(\Omega)$.

Problème de transmission et T-coercivité



But : construire un isomorphisme $\mathtt{T}$ de $H_0^1(\Omega)$ tel que la forme a soit $\mathtt{T}$-coercive : $\forall u \in H_0^1(\Omega)$

$$\boxed{a(u, \mathtt{T}u) \geq C\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} \quad \text{avec} \quad a(u,v) = \int_\Omega \varepsilon^{-1}\nabla u \cdot \overline{\nabla v}}$$

1) compenser le changement de signe de ε

2) assurer le raccord avec un opérateur de transfert $\mathtt{R}$

$$\mathtt{T}u = \begin{cases} u_{\mathrm{d}} & \text{dans } \Omega_{\mathrm{d}} \\ -u_{\mathrm{m}} + 2\mathtt{R}u_{\mathrm{d}} & \text{dans } \Omega_{\mathrm{m}} \end{cases} \qquad \mathtt{T}'u = \begin{cases} u_{\mathrm{d}} - 2\mathtt{R}'u_{\mathrm{m}} & \text{dans } \Omega_{\mathrm{d}} \\ -u_{\mathrm{m}} & \text{dans } \Omega_{\mathrm{m}} \end{cases}$$

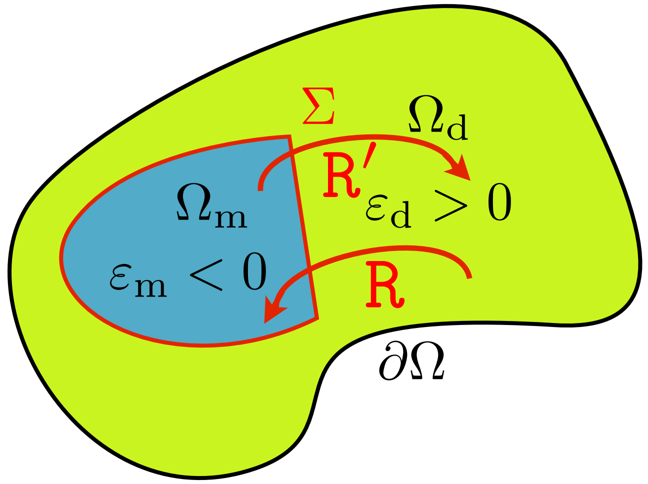
$\mathtt{R}$ est un opérateur linéaire continu de Ω_{d} dans Ω_{m} tel que $\mathtt{R}u|_\Sigma = u|_\Sigma$

$\mathtt{R}'$ est un opérateur linéaire continu de Ω_{m} dans Ω_{d} tel que $\mathtt{R}'u|_\Sigma = u|_\Sigma$

$\mathtt{T} \circ \mathtt{T} = \mathrm{I}_d$ donc $\mathtt{T}$ est un isomorphisme de $H_0^1(\Omega)$.

Problème de transmission et T-coercivité

But : construire un isomorphisme $\mathtt{T}$ de $H^1_0(\Omega)$ tel que la forme a soit $\mathtt{T}$-coercive : $\forall u \in H^1_0(\Omega)$



$$\boxed{a(u, \mathtt{T}u) \geq C\|u\|^2_{H^1_0(\Omega)} \quad \text{avec} \quad a(u,v) = \int_\Omega \varepsilon^{-1}\nabla u \cdot \overline{\nabla v}}$$

1) compenser le changement de signe de ε

2) assurer le raccord avec un opérateur de transfert $\mathtt{R}$

$$\mathtt{T}u = \begin{cases} u_\mathrm{d} & \text{dans } \Omega_\mathrm{d} \\ -u_\mathrm{m} + 2\mathtt{R}u_\mathrm{d} & \text{dans } \Omega_\mathrm{m} \end{cases} \qquad \mathtt{T}'u = \begin{cases} u_\mathrm{d} - 2\mathtt{R}'u_\mathrm{m} & \text{dans } \Omega_\mathrm{d} \\ -u_\mathrm{m} & \text{dans } \Omega_\mathrm{m} \end{cases}$$

$\mathtt{R}$ est un opérateur linéaire continu de Ω_d dans Ω_m tel que $\mathtt{R}u|_\Sigma = u|_\Sigma$

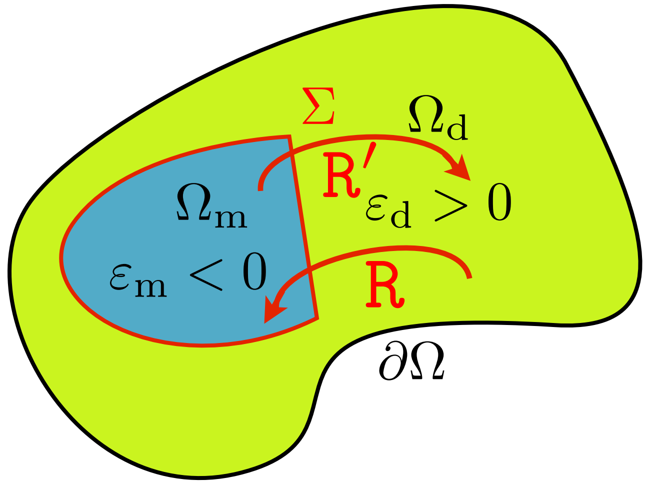
$\mathtt{R}'$est un opérateur linéaire continu de Ω_m dans Ω_d tel que $\mathtt{R}'u|_\Sigma = u|_\Sigma$

$\mathtt{T} \circ \mathtt{T} = \mathrm{I}_d$ donc $\mathtt{T}$ est un isomorphisme de $H^1_0(\Omega)$.

Théorème. La forme est $\mathtt{T}$-coercive si $\kappa_\varepsilon \notin [-\|\mathtt{R}'\|^2; -1/\|\mathtt{R}\|^2]$

Problème de transmission et T-coercivité

But : construire un isomorphisme $\mathtt{T}$ de $H^1_0(\Omega)$ tel que la forme a soit T-coercive : $\forall u \in H^1_0(\Omega)$



$$\boxed{a(u, \mathtt{T}u) \geq C\|u\|^2_{H^1_0(\Omega)} \quad \text{avec} \;\; a(u,v) = \int_\Omega \varepsilon^{-1}\nabla u \cdot \overline{\nabla v}}$$

1) compenser le changement de signe de ε

2) assurer le raccord avec un opérateur de transfert $\mathtt{R}$

$$\mathtt{T}u = \begin{cases} u_\mathrm{d} & \text{dans } \Omega_\mathrm{d} \\ -u_\mathrm{m} + 2\mathtt{R}u_\mathrm{d} & \text{dans } \Omega_\mathrm{m} \end{cases} \qquad \mathtt{T}'u = \begin{cases} u_\mathrm{d} - 2\mathtt{R}'u_\mathrm{m} & \text{dans } \Omega_\mathrm{d} \\ -u_\mathrm{m} & \text{dans } \Omega_\mathrm{m} \end{cases}$$

$\mathtt{R}$ est un opérateur linéaire continu de Ω_d dans Ω_m tel que $\mathtt{R}u|_\Sigma = u|_\Sigma$

$\mathtt{R}'$est un opérateur linéaire continu de Ω_m dans Ω_d tel que $\mathtt{R}'u|_\Sigma = u|_\Sigma$

$\mathtt{T} \circ \mathtt{T} = \mathrm{I}_d$ donc $\mathtt{T}$ est un isomorphisme de $H^1_0(\Omega)$.

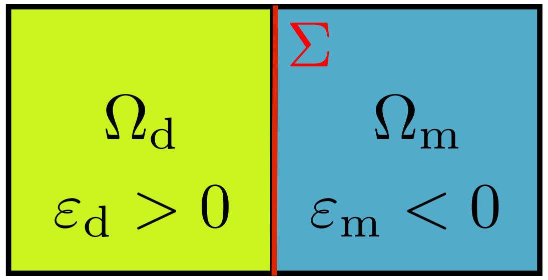
Théorème. La forme est T-coercive si $\kappa_\varepsilon \notin [-\|\mathtt{R}'\|^2; -1/\|\mathtt{R}\|^2]$

But : construire des opérateurs $\mathtt{R}$, $\mathtt{R}'$ minimisant l'intervalle. Pour cela on utilise des transformations géométriques élémentaires (symétries, dilatations angulaires, ...).

$$\boxed{\mathtt{R}u(x) = u(\mathcal{R}(x))}$$

Quelques exemples

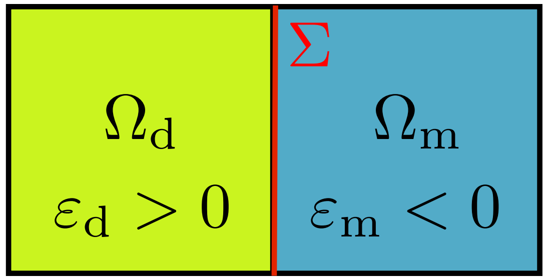
Pour un domaine symétrique (par rapport à Σ) :



Quelques exemples

Pour un domaine symétrique (par rapport à Σ) :

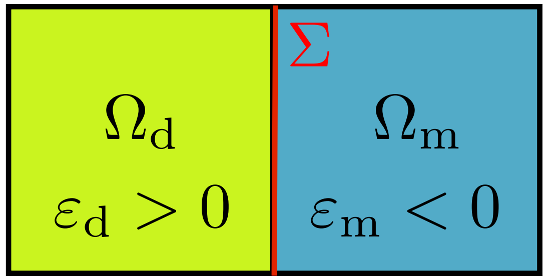
$$\mathtt{R}u(x) = \mathtt{R}'u(x) = u(\mathcal{S}_\Sigma(x)) \qquad \|\mathtt{R}\|^2 = \|\mathtt{R}'\|^2 = 1$$



Quelques exemples

Pour un domaine symétrique (par rapport à Σ) :

$\mathtt{R}u(x) = \mathtt{R}'u(x) = u(\mathcal{S}_\Sigma(x)) \qquad \|\mathtt{R}\|^2 = \|\mathtt{R}'\|^2 = 1$

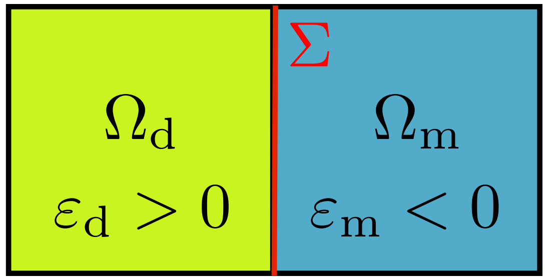


Théorème. La forme est $\mathtt{T}$-coercive $\iff \kappa_\varepsilon \neq -1$

Quelques exemples

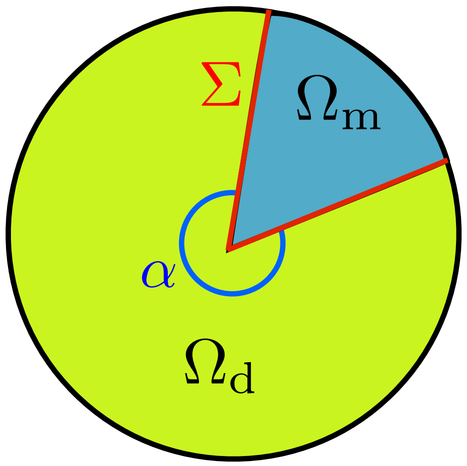
Pour un domaine symétrique (par rapport à Σ) :

$\mathtt{R}u(x) = \mathtt{R}'u(x) = u(\mathcal{S}_\Sigma(x)) \qquad \|\mathtt{R}\|^2 = \|\mathtt{R}'\|^2 = 1$



> **Théorème.** La forme est $\mathtt{T}$-coercive $\iff \kappa_\varepsilon \neq -1$

Pour un secteur angulaire d'angle α :



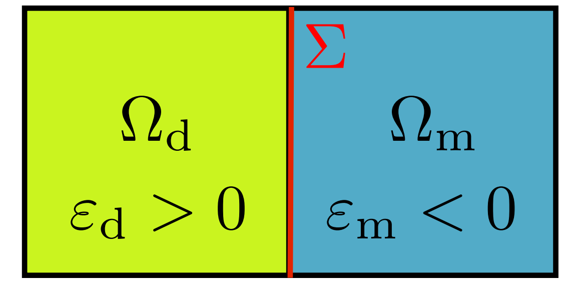
Bonnet-Ben Dhia, Chesnel et Ciarlet (2012).

Quelques exemples

Pour un domaine symétrique (par rapport à Σ) :

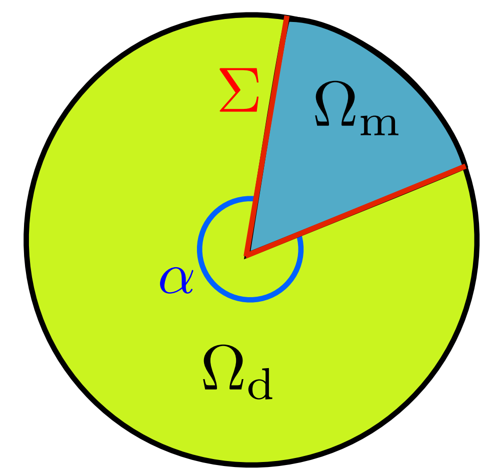
$\mathtt{R}u(x) = \mathtt{R}'u(x) = u(\mathcal{S}_\Sigma(x)) \qquad \|\mathtt{R}\|^2 = \|\mathtt{R}'\|^2 = 1$

> **Théorème.** La forme est $\mathtt{T}$-coercive $\Longleftrightarrow \kappa_\varepsilon \neq -1$



Pour un secteur angulaire d'angle α :

Les opérateurs $\mathtt{R}$, $\mathtt{R}'$ peuvent être construits à partir de la composition d'une symétrie centrale et d'une dilatation angulaire.

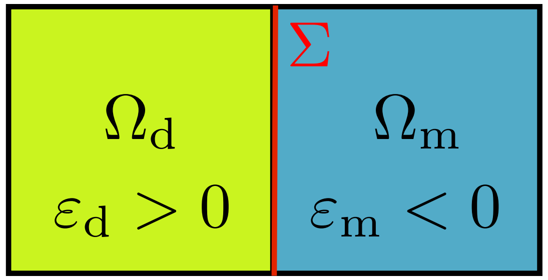


Bonnet-Ben Dhia, Chesnel et Ciarlet (2012).

Quelques exemples

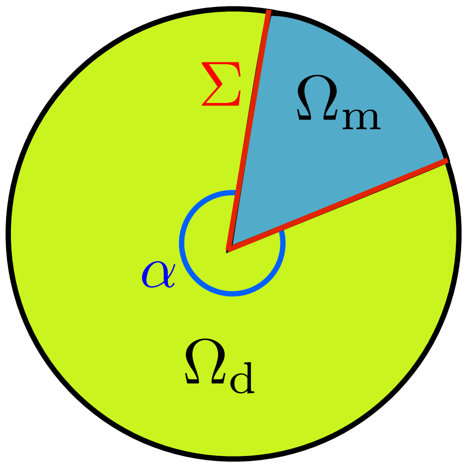
Pour un domaine symétrique (par rapport à Σ) :

$\mathtt{R}u(x) = \mathtt{R}'u(x) = u(\mathcal{S}_\Sigma(x)) \qquad \|\mathtt{R}\|^2 = \|\mathtt{R}'\|^2 = 1$



Théorème. La forme est $\mathtt{T}$-coercive $\Longleftrightarrow \kappa_\varepsilon \neq -1$

Pour un secteur angulaire d'angle α :



Les opérateurs $\mathtt{R}$, $\mathtt{R}'$ peuvent être construits à partir de la composition d'une symétrie centrale et d'une dilatation angulaire.

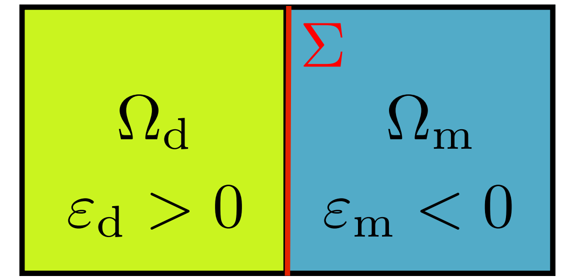
$$\|\mathtt{R}\|^2 = \|\mathtt{R}'\|^2 = I_\alpha := \max\left(\frac{\alpha}{2\pi - \alpha}; \frac{2\pi - \alpha}{\alpha}\right) \qquad I_\alpha \geqslant 1$$

Bonnet-Ben Dhia, Chesnel et Ciarlet (2012).

Quelques exemples

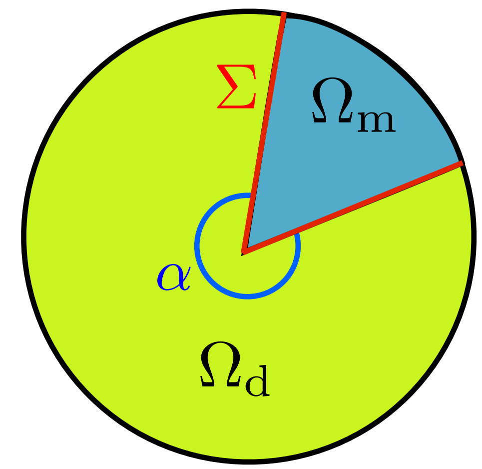
Pour un domaine symétrique (par rapport à Σ) :

$\mathtt{R}u(x) = \mathtt{R}'u(x) = u(\mathcal{S}_\Sigma(x)) \qquad \|\mathtt{R}\|^2 = \|\mathtt{R}'\|^2 = 1$



Théorème. La forme est $\mathtt{T}$-coercive $\Longleftrightarrow \kappa_\varepsilon \neq -1$

Pour un secteur angulaire d'angle α :



Les opérateurs $\mathtt{R}$, $\mathtt{R}'$ peuvent être construits à partir de la composition d'une symétrie centrale et d'une dilatation angulaire.

$$\|\mathtt{R}\|^2 = \|\mathtt{R}'\|^2 = I_\alpha := \max\left(\frac{\alpha}{2\pi-\alpha}; \frac{2\pi-\alpha}{\alpha}\right) \qquad I_\alpha \geqslant 1$$

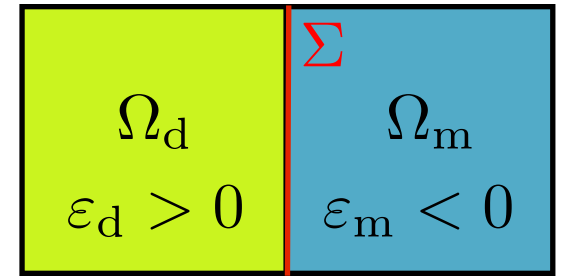
Théorème. La forme est $\mathtt{T}$-coercive $\Longleftrightarrow \kappa_\varepsilon \notin I_c := [-I_\alpha; -1/I_\alpha]$

Bonnet-Ben Dhia, Chesnel et Ciarlet (2012).

Quelques exemples

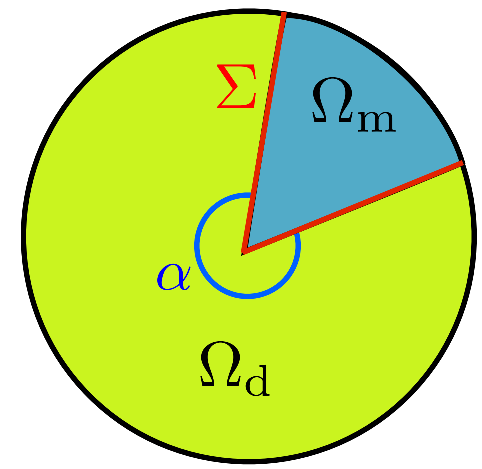
Pour un domaine symétrique (par rapport à Σ) :

$\mathtt{R}u(x) = \mathtt{R}'u(x) = u(\mathcal{S}_\Sigma(x)) \qquad \|\mathtt{R}\|^2 = \|\mathtt{R}'\|^2 = 1$



Théorème. La forme est $\mathtt{T}$-coercive $\iff \kappa_\varepsilon \neq -1$

Pour un secteur angulaire d'angle α :



Les opérateurs $\mathtt{R}$, $\mathtt{R}'$ peuvent être construits à partir de la composition d'une symétrie centrale et d'une dilatation angulaire.

$$\|\mathtt{R}\|^2 = \|\mathtt{R}'\|^2 = I_\alpha := \max\left(\frac{\alpha}{2\pi-\alpha};\frac{2\pi-\alpha}{\alpha}\right) \qquad I_\alpha \geqslant 1$$

Théorème. La forme est $\mathtt{T}$-coercive $\iff \kappa_\varepsilon \notin I_c := [-I_\alpha; -1/I_\alpha]$

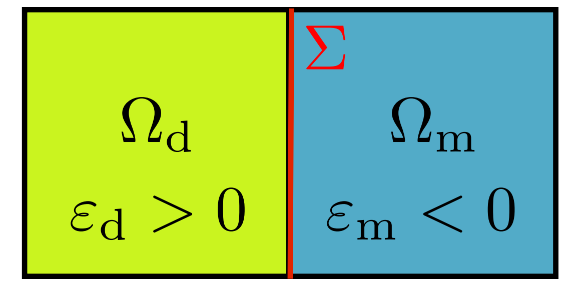
Si $\alpha \to 0$ ou $\alpha \to 2\pi$ alors $I_c \to \mathbb{R}^-$.

Bonnet-Ben Dhia, Chesnel et Ciarlet (2012).

Quelques exemples

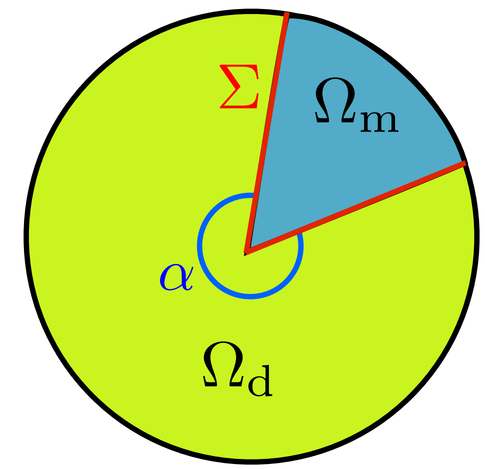
Pour un domaine symétrique (par rapport à Σ) :

$\mathtt{R}u(x) = \mathtt{R}'u(x) = u(\mathcal{S}_\Sigma(x))$ $\qquad \|\mathtt{R}\|^2 = \|\mathtt{R}'\|^2 = 1$



Théorème. La forme est $\mathtt{T}$-coercive $\Longleftrightarrow$ $\kappa_\varepsilon \neq -1$

Pour un secteur angulaire d'angle α :



Les opérateurs $\mathtt{R}$, $\mathtt{R}'$ peuvent être construits à partir de la composition d'une symétrie centrale et d'une dilatation angulaire.

$$\|\mathtt{R}\|^2 = \|\mathtt{R}'\|^2 = I_\alpha := \max\left(\frac{\alpha}{2\pi-\alpha}; \frac{2\pi-\alpha}{\alpha}\right) \qquad I_\alpha \geqslant 1$$

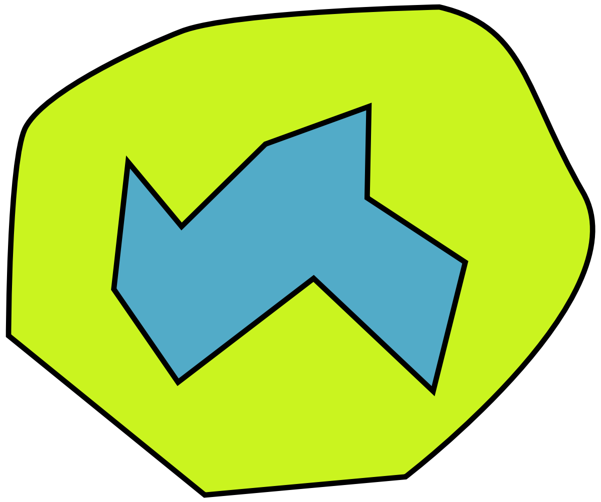
Théorème. La forme est $\mathtt{T}$-coercive $\Longleftrightarrow$ $\kappa_\varepsilon \notin I_c := [-I_\alpha; -1/I_\alpha]$

Si $\alpha \to 0$ ou $\alpha \to 2\pi$ alors $I_c \to \mathbb{R}^-$. Si $\alpha \to \pi$ alors $I_c \to \{-1\}$.

Bonnet-Ben Dhia, Chesnel et Ciarlet (2012).

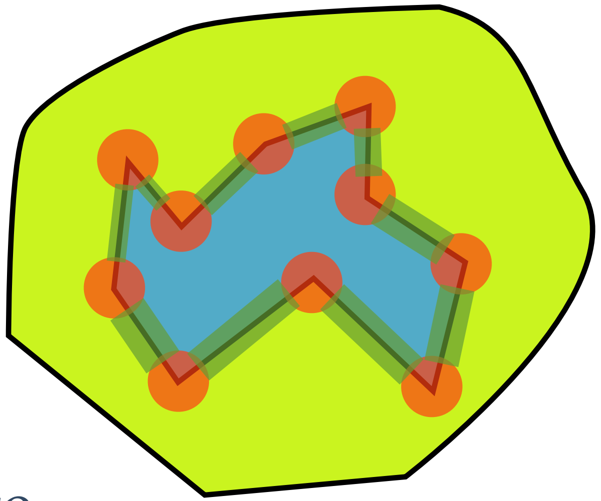
Cas d'une interface polygonale

Pour une interface polygonale, on utilise localement les deux cas précédents.



Cas d'une interface polygonale

Pour une interface polygonale, on utilise localement les deux cas précédents.

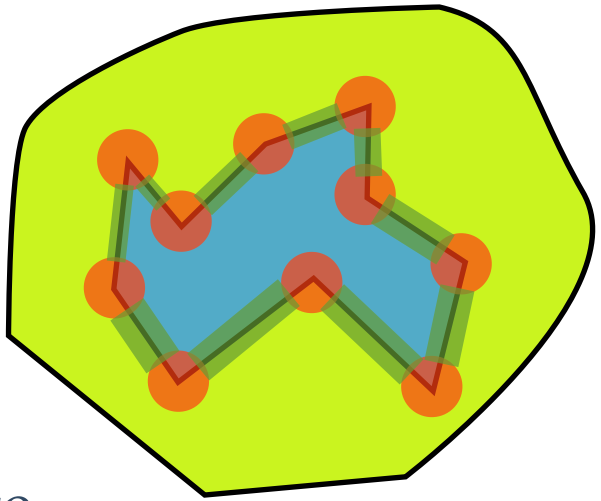


$$\mathtt{T}u = \begin{cases} u_{\mathrm{d}} & \text{dans } \Omega_{\mathrm{d}} \\ -u_{\mathrm{m}} + 2\sum_{p} \chi_p \mathtt{R}_{\mathtt{p}} u_{\mathrm{d}} & \text{dans } \Omega_{\mathrm{m}} \end{cases}$$

$(\chi_p)_p$ forme une partition de l'unité du voisinage de l'interface.

Cas d'une interface polygonale

Pour une interface polygonale, on utilise localement les deux cas précédents.



$$\mathtt{T}u = \begin{cases} u_{\mathrm{d}} & \text{dans } \Omega_{\mathrm{d}} \\ -u_{\mathrm{m}} + 2\sum_p \chi_p \mathtt{R_p} u_{\mathrm{d}} & \text{dans } \Omega_{\mathrm{m}} \end{cases}$$

$(\chi_p)_p$ forme une partition de l'unité du voisinage de l'interface.

Théorème. Le problème de transmission

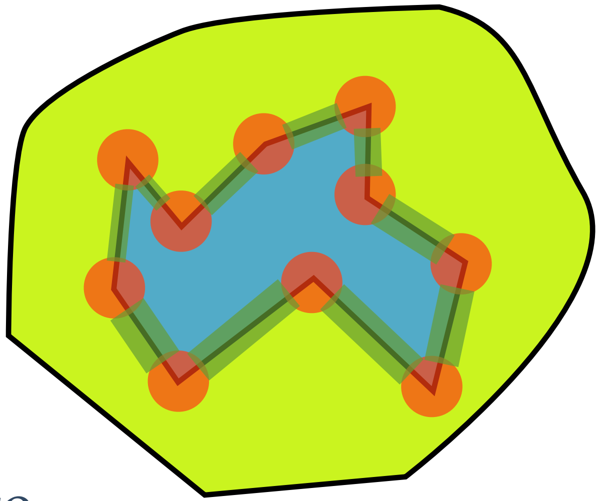
$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H^1_0(\Omega) \text{ tel que :} \\ a(u,v) + c(u,v) = \langle f, v\rangle \quad \forall v \in H^1_0(\Omega), \\ a(u,v) = \displaystyle\int_\Omega \varepsilon^{-1} \nabla u \cdot \overline{\nabla v}, \quad c(u,v) = -\omega^2 \int_\Omega \mu u \bar{v}. \end{array} \right.$$

est Fredholm si et seulement si $\kappa_\varepsilon \notin I_c := [-I_{\alpha_{\max}}; -1/I_{\alpha_{\max}}]$.

$$I_{\alpha_{\max}} := \max_\alpha I_\alpha$$

Cas d'une interface polygonale

Pour une interface polygonale, on utilise localement les deux cas précédents.



$$\mathtt{T}u = \begin{cases} u_{\mathrm{d}} & \text{dans } \Omega_{\mathrm{d}} \\ -u_{\mathrm{m}} + 2\sum_p \chi_p \mathtt{R_p} u_{\mathrm{d}} & \text{dans } \Omega_{\mathrm{m}} \end{cases}$$

$(\chi_p)_p$ forme une partition de l'unité du voisinage de l'interface.

Théorème. Le problème de transmission

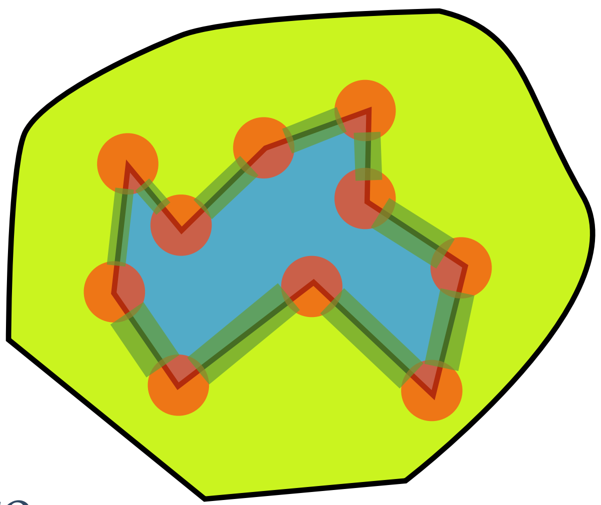
$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ a(u,v) + c(u,v) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \\ a(u,v) = \int_\Omega \varepsilon^{-1} \nabla u \cdot \overline{\nabla v}, \quad c(u,v) = -\omega^2 \int_\Omega \mu u \overline{v}. \end{array} \right.$$

est Fredholm si et seulement si $\kappa_\varepsilon \notin I_c := [-I_{\alpha_{\max}}; -1/I_{\alpha_{\max}}]$. De plus si $\kappa_\varepsilon \notin I_c$ le problème est bien posé en dehors d'une suite discrète de fréquences ω .

$$I_{\alpha_{\max}} := \max_\alpha I_\alpha$$

Cas d'une interface polygonale

Pour une interface polygonale, on utilise localement les deux cas précédents.



$$\mathtt{T}u = \begin{cases} u_\mathrm{d} & \text{dans } \Omega_\mathrm{d} \\ -u_\mathrm{m} + 2\sum_p \chi_p \mathtt{R_p} u_\mathrm{d} & \text{dans } \Omega_\mathrm{m} \end{cases}$$

$(\chi_p)_p$ forme une partition de l'unité du voisinage de l'interface.

Théorème. Le problème de transmission

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ a(u,v) + c(u,v) = \langle f, v\rangle \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \\ a(u,v) = \displaystyle\int_\Omega \varepsilon^{-1}\nabla u \cdot \overline{\nabla v}, \quad c(u,v) = -\omega^2 \int_\Omega \mu u \bar{v}. \end{array} \right.$$

est Fredholm si et seulement si $\kappa_\varepsilon \notin I_c := [-I_{\alpha_{\max}}; -1/I_{\alpha_{\max}}]$. De plus si $\kappa_\varepsilon \notin I_c$ le problème est bien posé en dehors d'une suite discrète de fréquences ω .

$$I_{\alpha_{\max}} := \max_\alpha I_\alpha$$

Qu'en est-il de la discrétisation ?

Discrétisation du problème

Si $\kappa_\varepsilon \notin I_c$ alors le problème est de type Fredholm. On se place dans le cas où il y a une unique solution u.

$$\boxed{\left|\begin{array}{l}\text{Trouver } u \in V := H^1_0(\Omega) \text{ tel que :}\\ a(u,v) + c(u,v) = \langle f, v\rangle \quad \forall v \in V\end{array}\right.}$$

Discrétisation du problème

Si $\kappa_\varepsilon \notin I_c$ alors le problème est de type Fredholm. On se place dans le cas où il y a une unique solution u.

$$\boxed{\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in V := H^1_0(\Omega) \text{ tel que :} \\ a(u,v) + c(u,v) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in V \end{array} \right.}$$

$$\boxed{\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u_h \in V^h \text{ tel que :} \\ a(u_h,v_h) + c(u_h,v_h) = \langle f, v_h \rangle,\ \forall v_h \in V^h \end{array} \right.}$$

Discrétisation du problème

Si $\kappa_\varepsilon \notin I_c$ alors le problème est de type Fredholm. On se place dans le cas où il y a une unique solution u.

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in V := H_0^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ a(u,v) + c(u,v) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in V \end{array} \right.$$

Convergence ?

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u_h \in V^h \text{ tel que :} \\ a(u_h,v_h) + c(u_h,v_h) = \langle f, v_h \rangle, \forall v_h \in V^h \end{array} \right.$$

Discrétisation du problème

Si $\kappa_\varepsilon \notin I_c$ alors le problème est de type Fredholm. On se place dans le cas où il y a une unique solution u.

$$\left|\begin{array}{l}\text{Trouver } u \in V := H_0^1(\Omega) \text{ tel que :}\\ a(u,v) + c(u,v) = \langle f, v\rangle \quad \forall v \in V\end{array}\right. \iff \left|\begin{array}{l}\text{Trouver } u \in V \text{ tel que :}\\ a(u,\mathtt{T}v) + c(u,\mathtt{T}v) = \langle f, \mathtt{T}v\rangle \quad \forall v \in V\end{array}\right.$$

$\uparrow$ Convergence ?

$$\left|\begin{array}{l}\text{Trouver } u_h \in V^h \text{ tel que :}\\ a(u_h,v_h) + c(u_h,v_h) = \langle f, v_h\rangle,\ \forall v_h \in V^h\end{array}\right.$$

Discrétisation du problème

Si $\kappa_\varepsilon \notin I_c$ alors le problème est de type Fredholm. On se place dans le cas où il y a une unique solution u.

$$\boxed{\begin{array}{|l} \text{Trouver } u \in V := H^1_0(\Omega) \text{ tel que :} \\ a(u,v) + c(u,v) = \langle f, v\rangle \quad \forall v \in V \end{array}} \iff \boxed{\begin{array}{|l} \text{Trouver } u \in V \text{ tel que :} \\ a(u,\mathtt{T}v) + c(u,\mathtt{T}v) = \langle f, \mathtt{T}v\rangle \quad \forall v \in V \end{array}}$$

$\uparrow$ Convergence ?

$$\boxed{\begin{array}{|l} \text{Trouver } u_h \in V^h \text{ tel que :} \\ a(u_h,v_h) + c(u_h,v_h) = \langle f, v_h\rangle, \forall v_h \in V^h \end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{|l} \text{Trouver } u_h \in V^h \text{ tel que :} \\ a(u_h,\mathtt{T}v_h) + c(u_h,\mathtt{T}v_h) = \langle f, \mathtt{T}v_h\rangle, \forall v_h \in V^h \end{array}}$$

Discrétisation du problème

Si $\kappa_\varepsilon \notin I_c$ alors le problème est de type Fredholm. On se place dans le cas où il y a une unique solution u.

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in V := H_0^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ a(u,v) + c(u,v) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in V \end{array} \right. \iff \left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in V \text{ tel que :} \\ a(u,\mathtt{T}v) + c(u,\mathtt{T}v) = \langle f, \mathtt{T}v \rangle \quad \forall v \in V \end{array} \right.$$

$\uparrow$ Convergence ?

$\uparrow$ (lemme de Céa)

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u_h \in V^h \text{ tel que :} \\ a(u_h,v_h) + c(u_h,v_h) = \langle f, v_h \rangle, \forall v_h \in V^h \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u_h \in V^h \text{ tel que :} \\ a(u_h,\mathtt{T}v_h) + c(u_h,\mathtt{T}v_h) = \langle f, \mathtt{T}v_h \rangle, \forall v_h \in V^h \end{array} \right.$$

Discrétisation du problème

Si $\kappa_\varepsilon \notin I_c$ alors le problème est de type Fredholm. On se place dans le cas où il y a une unique solution u.

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in V := H_0^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ a(u,v) + c(u,v) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in V \end{array} \right. \iff \left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in V \text{ tel que :} \\ a(u,\mathtt{T}v) + c(u,\mathtt{T}v) = \langle f, \mathtt{T}v \rangle \quad \forall v \in V \end{array} \right.$$

Convergence ?

si $\mathtt{T}(V^h) \subset V^h$

(lemme de Céa)

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u_h \in V^h \text{ tel que :} \\ a(u_h,v_h) + c(u_h,v_h) = \langle f, v_h \rangle, \ \forall v_h \in V^h \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u_h \in V^h \text{ tel que :} \\ a(u_h,\mathtt{T}v_h) + c(u_h,\mathtt{T}v_h) = \langle f, \mathtt{T}v_h \rangle, \ \forall v_h \in V^h \end{array} \right.$$

Discrétisation du problème

Si $\kappa_\varepsilon \notin I_c$ alors le problème est de type Fredholm. On se place dans le cas où il y a une unique solution u.

Trouver $u \in V := H_0^1(\Omega)$ tel que : $a(u,v) + c(u,v) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in V$	$\Longleftrightarrow$	Trouver $u \in V$ tel que : $a(u, \mathtt{T}v) + c(u, \mathtt{T}v) = \langle f, \mathtt{T}v \rangle \quad \forall v \in V$
$\uparrow$ Convergence	si $\mathtt{T}(V^h) \subset V^h$	$\uparrow$ (lemme de Céa)
Trouver $u_h \in V^h$ tel que : $a(u_h, v_h) + c(u_h, v_h) = \langle f, v_h \rangle, \forall v_h \in V^h$	$\Leftrightarrow$	Trouver $u_h \in V^h$ tel que : $a(u_h, \mathtt{T}v_h) + c(u_h, \mathtt{T}v_h) = \langle f, \mathtt{T}v_h \rangle, \forall v_h \in V^h$

Théorème. Si $\mathtt{T}(V^h) \subset V^h$ alors pour h suffisamment petit

$$\|u - u_h\|_V \leqslant C \inf_{v_h \in V^h} \|u - v_h\|_V$$

Chesnel et Ciarlet (2013).

Discrétisation du problème

Si $\kappa_\varepsilon \notin I_c$ alors le problème est de type Fredholm. On se place dans le cas où il y a une unique solution u.

$$\left|\begin{array}{l}\text{Trouver } u \in V := H^1_0(\Omega) \text{ tel que :}\\ a(u,v) + c(u,v) = \langle f, v\rangle \quad \forall v \in V\end{array}\right. \iff \left|\begin{array}{l}\text{Trouver } u \in V \text{ tel que :}\\ a(u,\mathtt{T}v) + c(u,\mathtt{T}v) = \langle f, \mathtt{T}v\rangle \quad \forall v \in V\end{array}\right.$$

↑ Convergence

si $\mathtt{T}(V^h) \subset V^h$

↑ (lemme de Céa)

$$\left|\begin{array}{l}\text{Trouver } u_h \in V^h \text{ tel que :}\\ a(u_h,v_h) + c(u_h,v_h) = \langle f, v_h\rangle,\ \forall v_h \in V^h\end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l}\text{Trouver } u_h \in V^h \text{ tel que :}\\ a(u_h,\mathtt{T}v_h) + c(u_h,\mathtt{T}v_h) = \langle f, \mathtt{T}v_h\rangle,\ \forall v_h \in V^h\end{array}\right.$$

Théorème. Si $\mathtt{T}(V^h) \subset V^h$ alors pour h suffisamment petit

$$\|u - u_h\|_V \leqslant C \inf_{v_h \in V^h} \|u - v_h\|_V$$

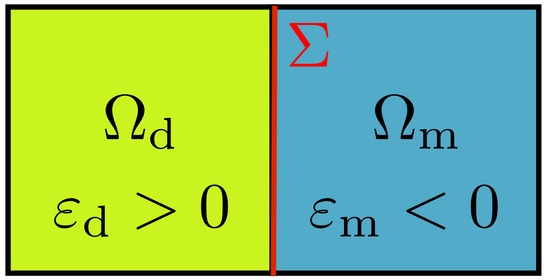
On considère le même degré d'approximation de part et d'autre de Σ.
Ainsi $\mathtt{T}(V^h) \subset V^h$ peut se traduire par une simple condition sur le maillage.

Chesnel et Ciarlet (2013).

Conformité dans des cas simples

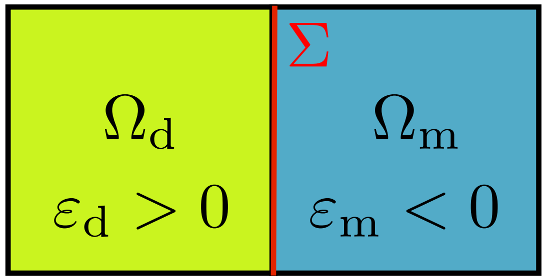
Conformité dans des cas simples

Pour un domaine symétrique (par rapport à Σ) :



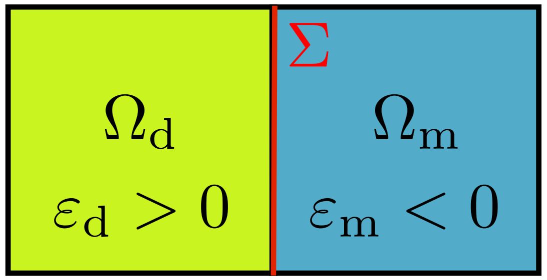
Conformité dans des cas simples

Pour un domaine symétrique (par rapport à Σ) :



Si le maillage est symétrique, alors $\mathtt{T}(V^h) = V^h$.

Conformité dans des cas simples



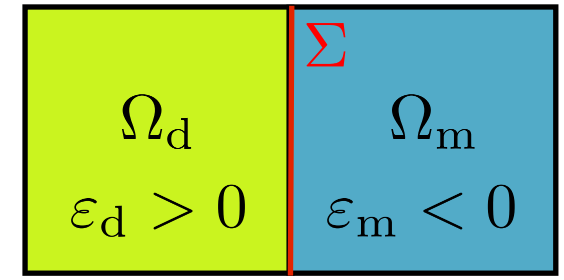
Pour un domaine symétrique (par rapport à Σ) :

Si le maillage est symétrique, alors $\mathtt{T}(V^h) = V^h$.

Si $\kappa_\varepsilon \neq -1$, et maillage symétrique, alors convergence éléments finis.

Conformité dans des cas simples

Pour un domaine symétrique (par rapport à Σ) :



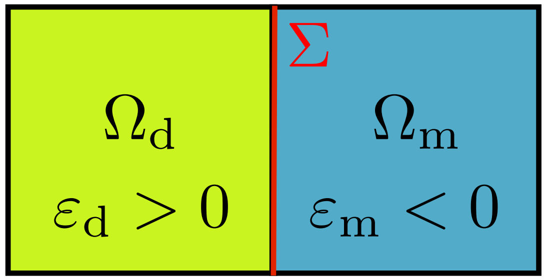
Si le maillage est symétrique, alors $\mathtt{T}(V^h) = V^h$.

Si $\kappa_\varepsilon \neq -1$, et maillage symétrique, alors convergence éléments finis.

On dit que le maillage est $\mathtt{T}$-conforme.

Conformité dans des cas simples

Pour un domaine symétrique (par rapport à Σ) :

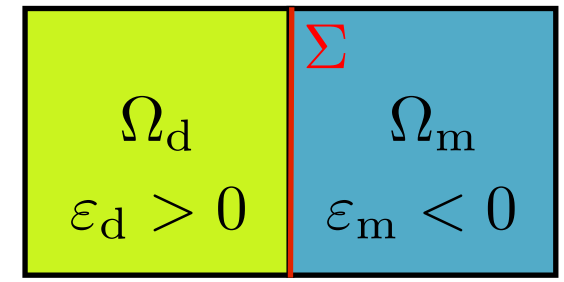


Si le maillage est symétrique, alors $\mathtt{T}(V^h) = V^h$.

Si $\kappa_\varepsilon \neq -1$, et maillage symétrique, alors convergence éléments finis.

On dit que le maillage est T-conforme.
On peut aussi appliquer cette conformité seulement au voisinage de l'interface.
On dit que le maillage est localement T-conforme.

Conformité dans des cas simples



Pour un domaine symétrique (par rapport à Σ) :

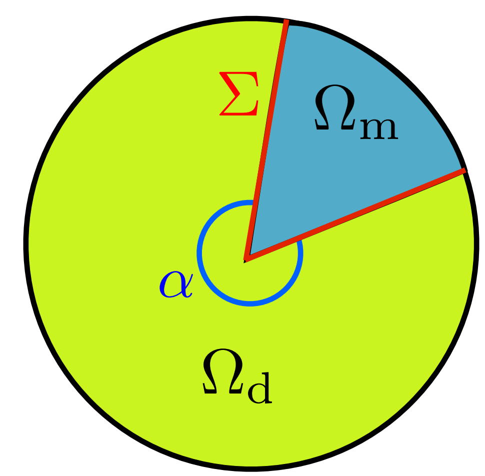
Si le maillage est symétrique, alors $\mathtt{T}(V^h) = V^h$.

Si $\kappa_\varepsilon \neq -1$, et maillage symétrique, alors convergence éléments finis.

On dit que le maillage est T-conforme.
On peut aussi appliquer cette conformité seulement au voisinage de l'interface.
On dit que le maillage est localement T-conforme.

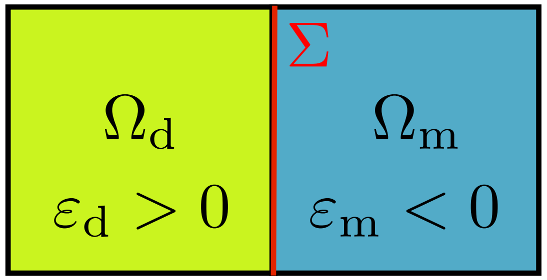
Pour un secteur angulaire d'angle α :

Malheureusement avec les opérateurs proposés, $\mathtt{T}(V^h) \not\subset V^h$
à cause des dilatations angulaires qui ne respectent pas la
nature polynomiale des fonctions de base ...



Conformité dans des cas simples

Pour un domaine symétrique (par rapport à Σ) :

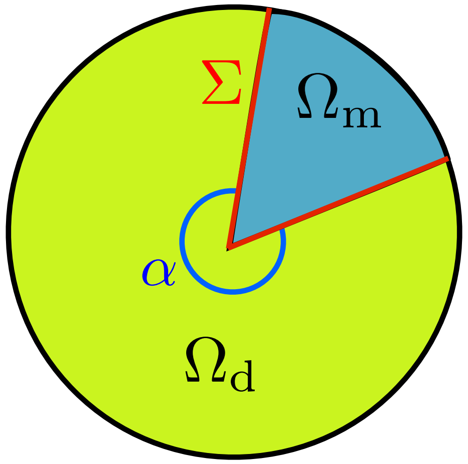


Si le maillage est symétrique, alors $\mathtt{T}(V^h) = V^h$.

Si $\kappa_\varepsilon \neq -1$, et maillage symétrique, alors convergence éléments finis.

On dit que le maillage est T-conforme.
On peut aussi appliquer cette conformité seulement au voisinage de l'interface.
On dit que le maillage est localement T-conforme.

Pour un secteur angulaire d'angle α :

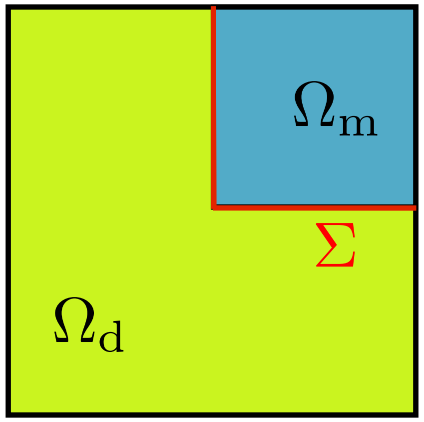


Malheureusement avec les opérateurs proposés, $\mathtt{T}(V^h) \not\subset V^h$
à cause des dilatations angulaires qui ne respectent pas la
nature polynomiale des fonctions de base ...

Peut-on trouver d'autres opérateurs $\mathtt{R}$ optimaux assurant la $\mathtt{T}$-conformité ?

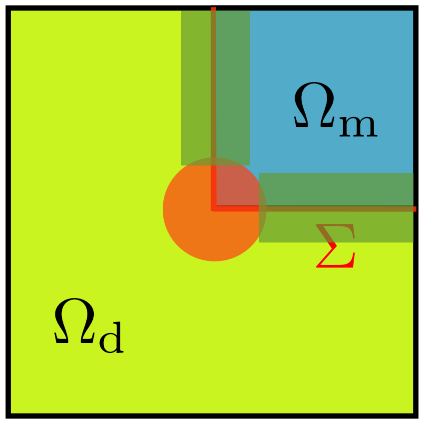
La difficulté des coins

Pour le cas particulier d'un angle droit.



La difficulté des coins

Pour le cas particulier d'un angle droit.



Bonnet-Ben Dhia, Chesnel et Ciarlet (2012).

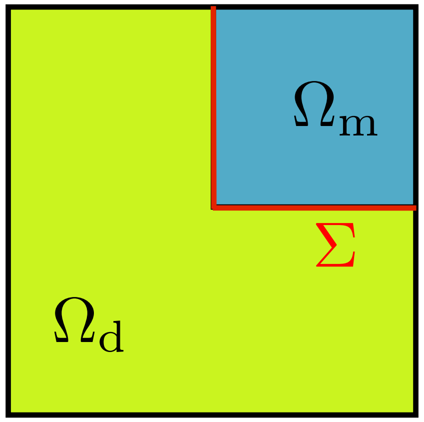
$$\mathtt{T}u = \begin{cases} u_\mathrm{d} & \text{dans } \Omega_\mathrm{d} \\ -u_\mathrm{m} + 2\displaystyle\sum_p \chi_p \mathtt{R}_\mathtt{p} u_\mathrm{d} & \text{dans } \Omega_\mathrm{m} \end{cases}$$

Le problème est Fredholm ssi $\kappa_\varepsilon \notin I_c := [-3; -1/3]$.

La difficulté des coins

Pour le cas particulier d'un angle droit.

Un autre opérateur T optimal a été proposé à base de symétries.

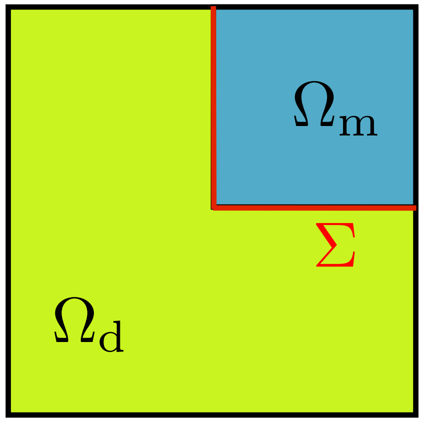


Nicaise et Venel (2011).

La difficulté des coins

Pour le cas particulier d'un angle droit.

Un autre opérateur $\mathtt{T}$ optimal a été proposé à base de symétries.



Nicaise et Venel (2011).

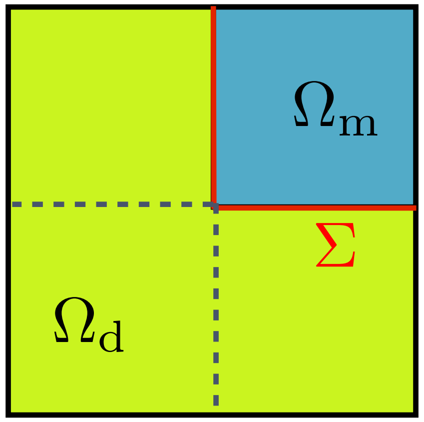
$$\mathtt{T}u = \begin{cases} u_\mathrm{d} & \text{dans } \Omega_\mathrm{d} \\ -u_\mathrm{m} + 2\mathtt{R}u_\mathrm{d} & \text{dans } \Omega_\mathrm{m} \end{cases}$$

$\mathtt{R}$ est construit à partir de symétries axiales.

La difficulté des coins

Pour le cas particulier d'un angle droit.

Un autre opérateur $\mathtt{T}$ optimal a été proposé à base de symétries.



Nicaise et Venel (2011).

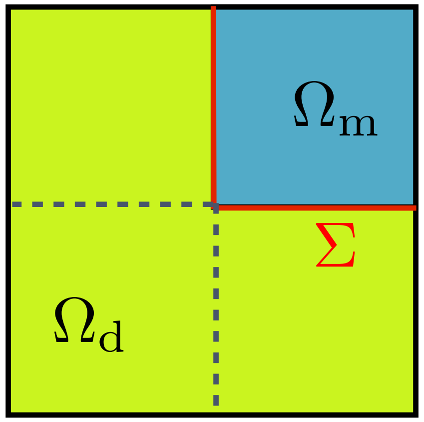
$$\mathtt{T}u = \begin{cases} u_\mathrm{d} & \text{dans } \Omega_\mathrm{d} \\ -u_\mathrm{m} + 2\mathtt{R}u_\mathrm{d} & \text{dans } \Omega_\mathrm{m} \end{cases}$$

$\mathtt{R}$ est construit à partir de symétries axiales.

La difficulté des coins

Pour le cas particulier d'un angle droit.

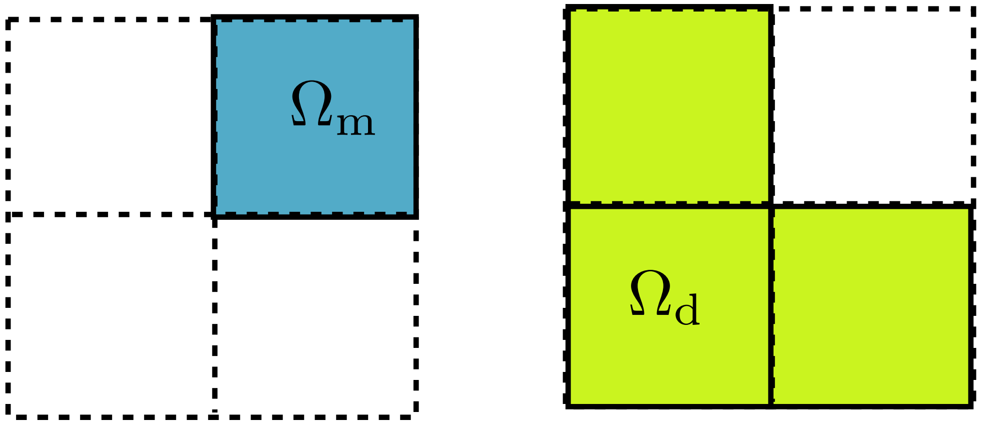
Un autre opérateur $\mathtt{T}$ optimal a été proposé à base de symétries.



Nicaise et Venel (2011).

$$\mathtt{T}u = \begin{cases} u_\mathrm{d} & \text{dans } \Omega_\mathrm{d} \\ -u_\mathrm{m} + 2\mathtt{R}u_\mathrm{d} & \text{dans } \Omega_\mathrm{m} \end{cases}$$

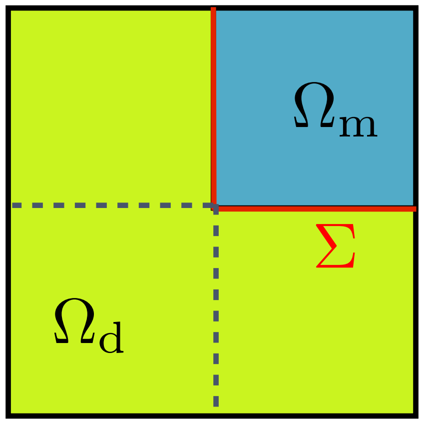
$\mathtt{R}$ est construit à partir de symétries axiales.



La difficulté des coins

Pour le cas particulier d'un angle droit.

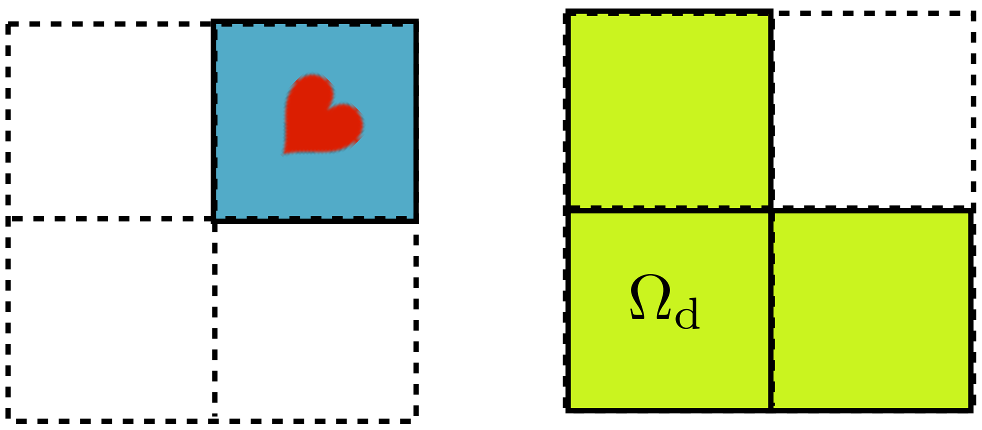
Un autre opérateur T optimal a été proposé à base de symétries.



Nicaise et Venel (2011).

$$\mathtt{T}u = \begin{cases} u_{\mathrm{d}} & \text{dans } \Omega_{\mathrm{d}} \\ -u_{\mathrm{m}} + 2\mathtt{R}u_{\mathrm{d}} & \text{dans } \Omega_{\mathrm{m}} \end{cases}$$

$\mathtt{R}$ est construit à partir de symétries axiales.

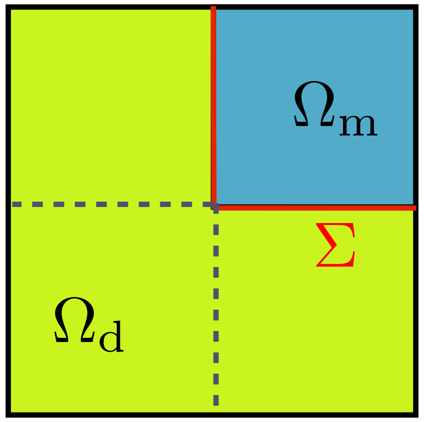


La difficulté des coins

Pour le cas particulier d'un angle droit.

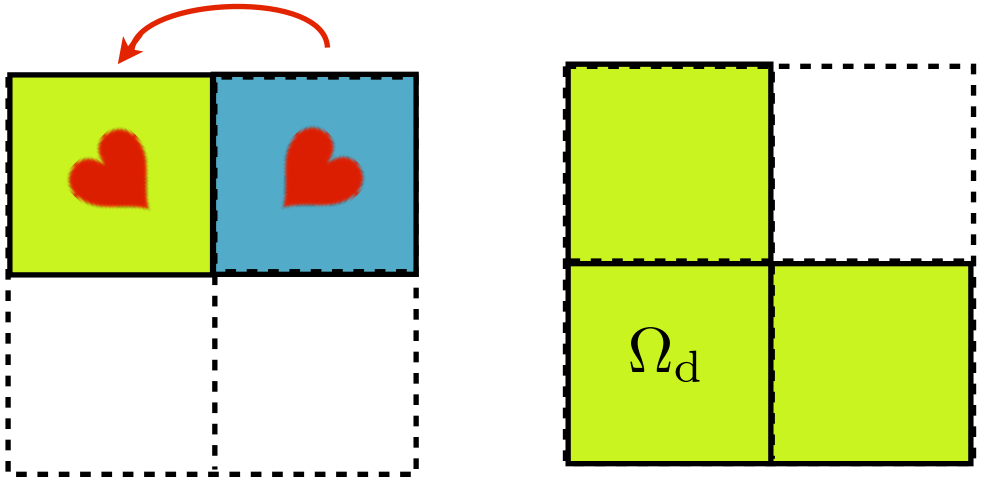
Un autre opérateur $\mathtt{T}$ optimal a été proposé à base de symétries.

Nicaise et Venel (2011).



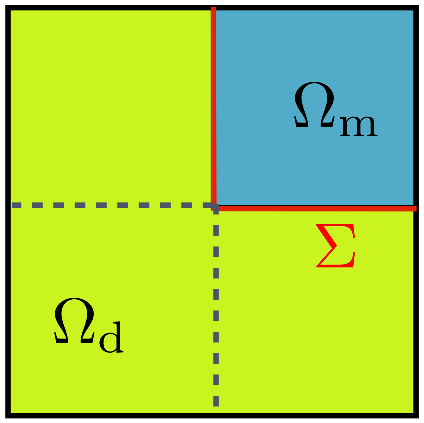
$$\mathtt{T}u = \begin{cases} u_{\mathrm{d}} & \text{dans } \Omega_{\mathrm{d}} \\ -u_{\mathrm{m}} + 2\mathtt{R}u_{\mathrm{d}} & \text{dans } \Omega_{\mathrm{m}} \end{cases}$$

$\mathtt{R}$ est construit à partir de symétries axiales.



La difficulté des coins

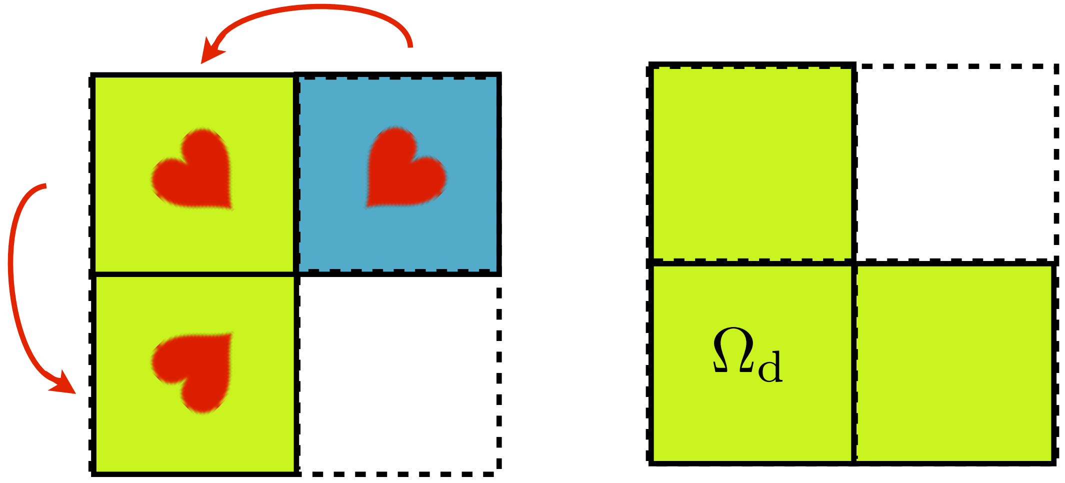
Pour le cas particulier d'un angle droit.
Un autre opérateur $\mathtt{T}$ optimal a été proposé à base de symétries.



Nicaise et Venel (2011).

$$\mathtt{T}u = \begin{cases} u_\mathrm{d} & \text{dans } \Omega_\mathrm{d} \\ -u_\mathrm{m} + 2\mathtt{R}u_\mathrm{d} & \text{dans } \Omega_\mathrm{m} \end{cases}$$

$\mathtt{R}$ est construit à partir de symétries axiales.

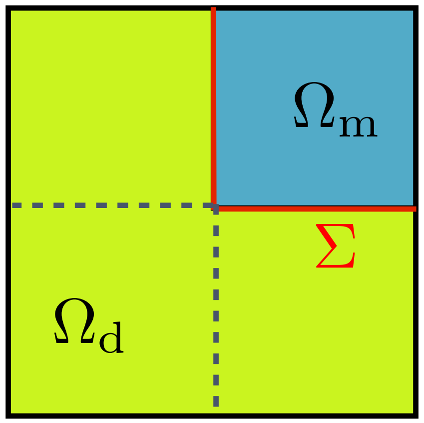


La difficulté des coins

Pour le cas particulier d'un angle droit.

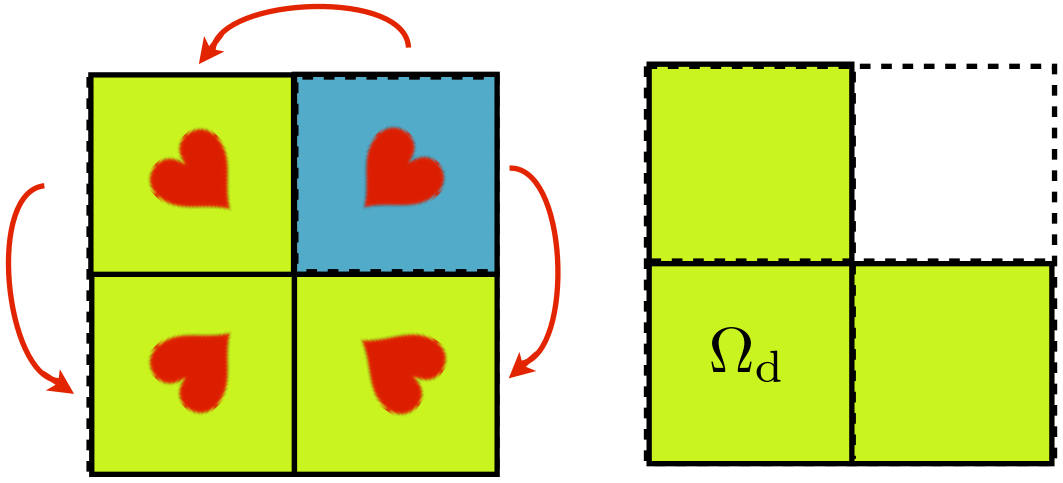
Un autre opérateur $\mathtt{T}$ optimal a été proposé à base de symétries.

Nicaise et Venel (2011).



$$\mathtt{T}u = \begin{cases} u_{\mathrm{d}} & \text{dans } \Omega_{\mathrm{d}} \\ -u_{\mathrm{m}} + 2\mathtt{R}u_{\mathrm{d}} & \text{dans } \Omega_{\mathrm{m}} \end{cases}$$

$\mathtt{R}$ est construit à partir de symétries axiales.

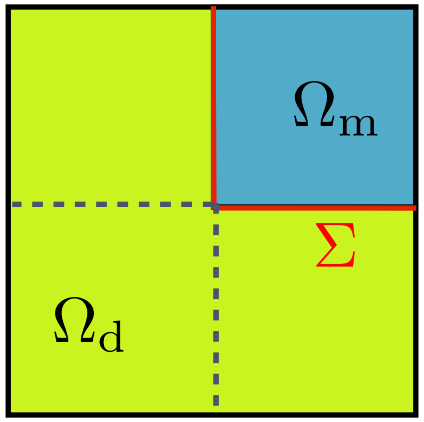


La difficulté des coins

Pour le cas particulier d'un angle droit.

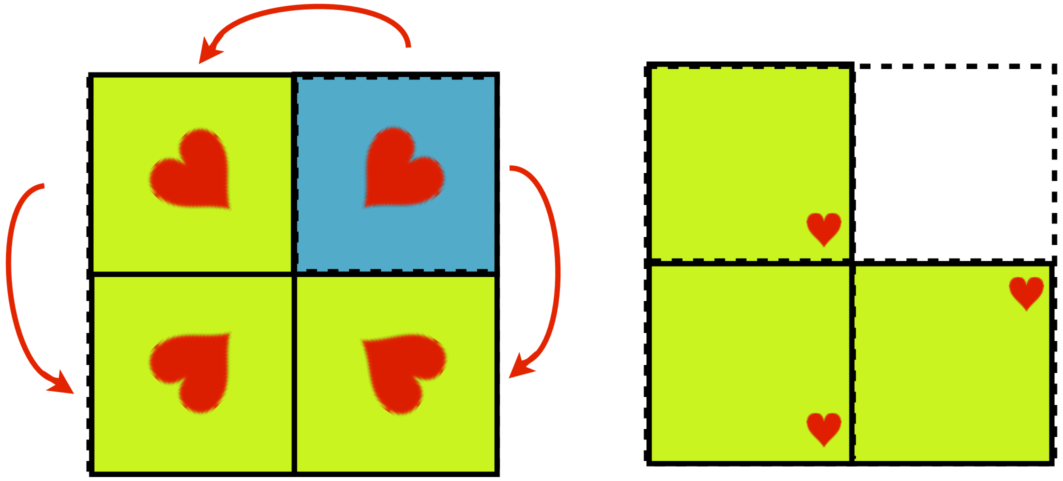
Un autre opérateur $\mathtt{T}$ optimal a été proposé à base de symétries.

Nicaise et Venel (2011).



$$\mathtt{T}u = \begin{cases} u_\mathrm{d} & \text{dans } \Omega_\mathrm{d} \\ -u_\mathrm{m} + 2\mathtt{R}u_\mathrm{d} & \text{dans } \Omega_\mathrm{m} \end{cases}$$

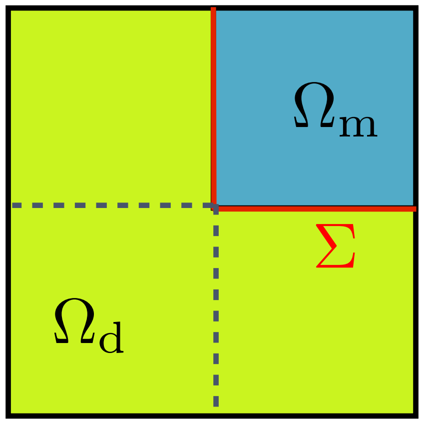
$\mathtt{R}$ est construit à partir de symétries axiales.



La difficulté des coins

Pour le cas particulier d'un angle droit.

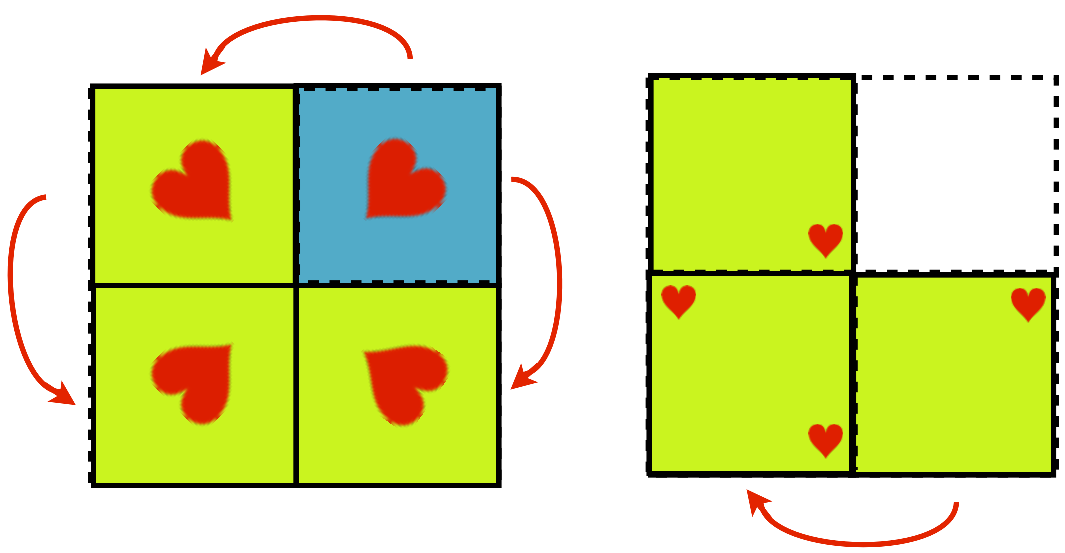
Un autre opérateur $\mathtt{T}$ optimal a été proposé à base de symétries.



Nicaise et Venel (2011).

$$\mathtt{T}u = \begin{cases} u_\mathrm{d} & \text{dans } \Omega_\mathrm{d} \\ -u_\mathrm{m} + 2\mathtt{R}u_\mathrm{d} & \text{dans } \Omega_\mathrm{m} \end{cases}$$

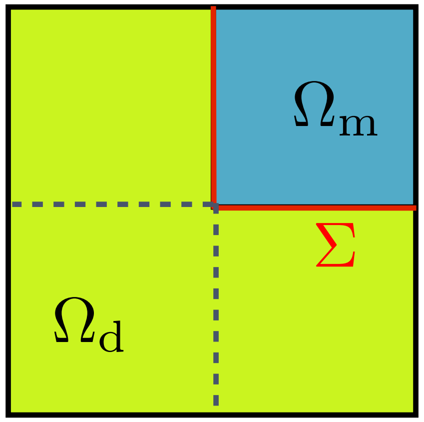
$\mathtt{R}$ est construit à partir de symétries axiales.



La difficulté des coins

Pour le cas particulier d'un angle droit.

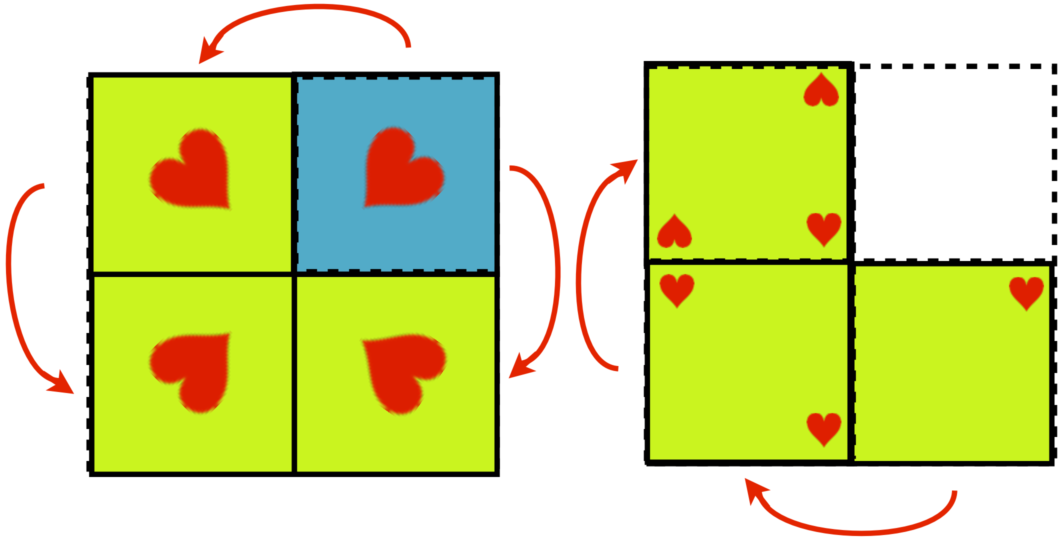
Un autre opérateur $\mathtt{T}$ optimal a été proposé à base de symétries.



Nicaise et Venel (2011).

$$\mathtt{T}u = \begin{cases} u_d & \text{dans } \Omega_d \\ -u_m + 2\mathtt{R}u_d & \text{dans } \Omega_m \end{cases}$$

$\mathtt{R}$ est construit à partir de symétries axiales.

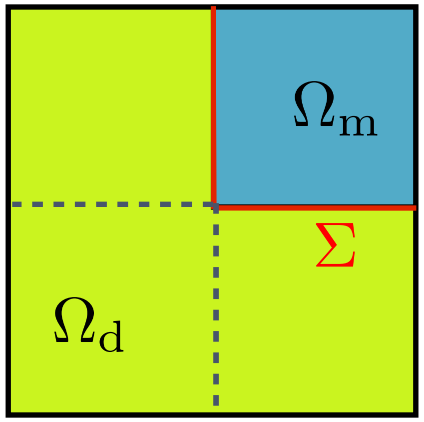


La difficulté des coins

Pour le cas particulier d'un angle droit.

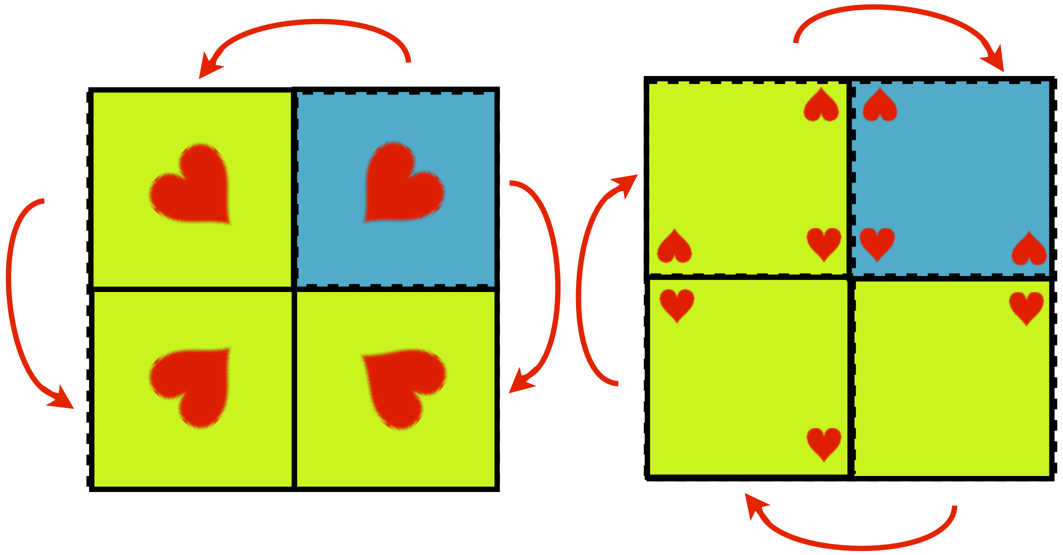
Un autre opérateur $\mathtt{T}$ optimal a été proposé à base de symétries.

Nicaise et Venel (2011).



$$\mathtt{T}u = \begin{cases} u_\mathrm{d} & \text{dans } \Omega_\mathrm{d} \\ -u_\mathrm{m} + 2\mathtt{R}u_\mathrm{d} & \text{dans } \Omega_\mathrm{m} \end{cases}$$

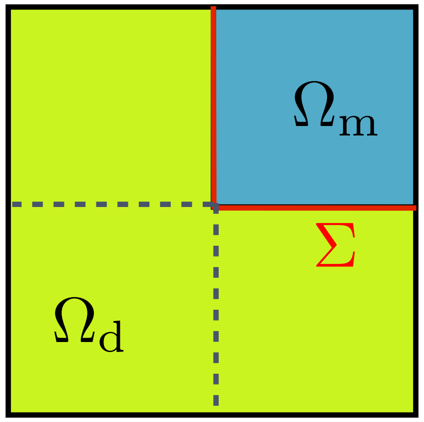
$\mathtt{R}$ est construit à partir de symétries axiales.



La difficulté des coins

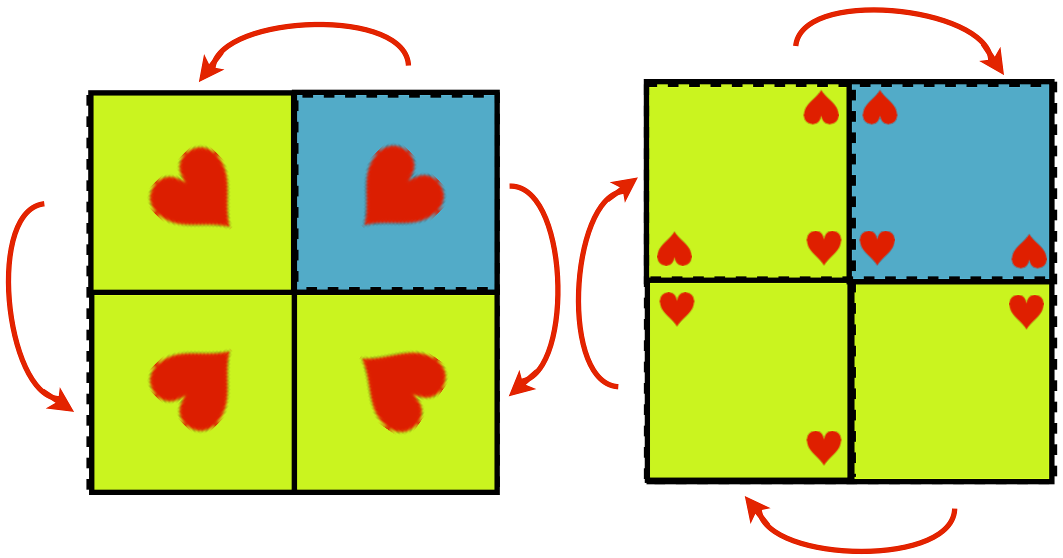
Pour le cas particulier d'un angle droit.
Un autre opérateur $\mathtt{T}$ optimal a été proposé à base de symétries.

Nicaise et Venel (2011).



$$\mathtt{T}u = \begin{cases} u_{\mathrm{d}} & \text{dans } \Omega_{\mathrm{d}} \\ -u_{\mathrm{m}} + 2\mathtt{R}u_{\mathrm{d}} & \text{dans } \Omega_{\mathrm{m}} \end{cases}$$

$\mathtt{R}$ est construit à partir de symétries axiales.

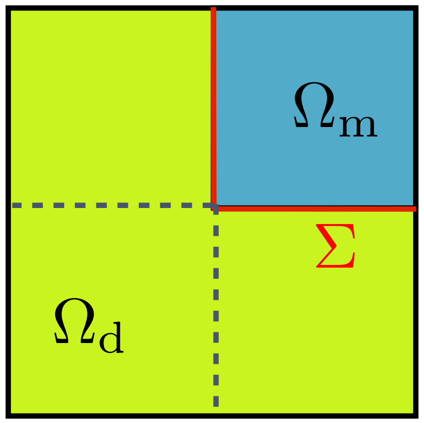


$$\|\mathtt{R}\|^2 = \|\mathtt{R}'\|^2 = 3$$

La difficulté des coins

Pour le cas particulier d'un angle droit.

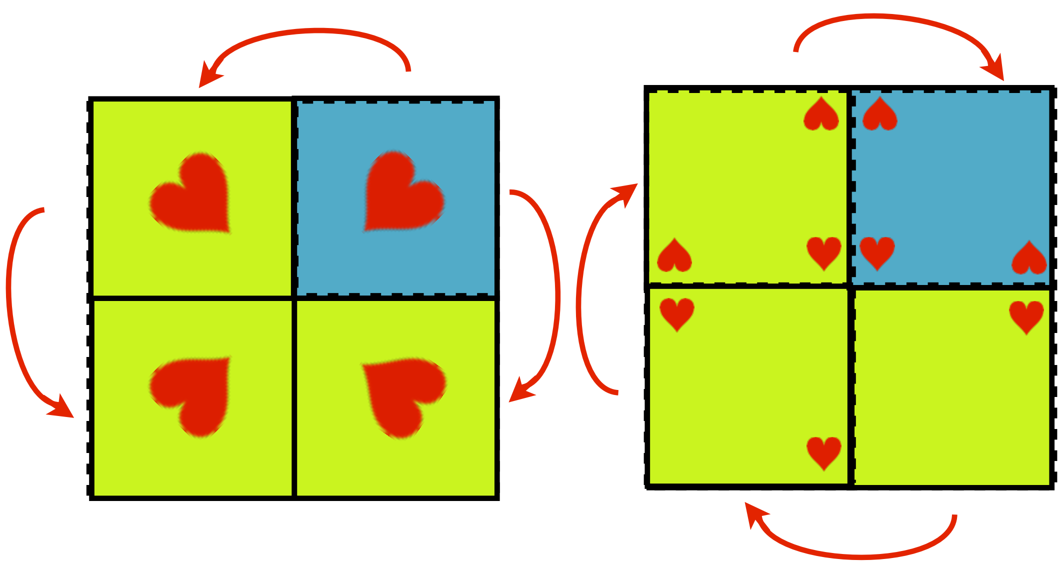
Un autre opérateur $\mathtt{T}$ optimal a été proposé à base de symétries.



Nicaise et Venel (2011).

$$\mathtt{T}u = \begin{cases} u_{\mathrm{d}} & \text{dans } \Omega_{\mathrm{d}} \\ -u_{\mathrm{m}} + 2\mathtt{R}u_{\mathrm{d}} & \text{dans } \Omega_{\mathrm{m}} \end{cases}$$

$\mathtt{R}$ est construit à partir de symétries axiales.

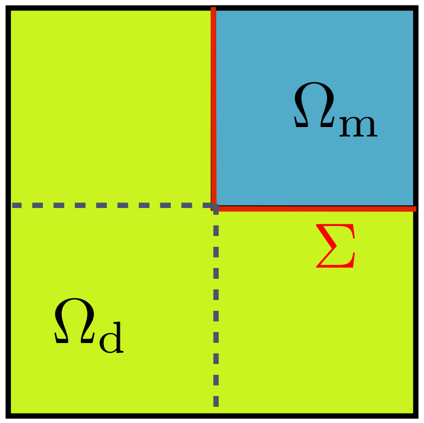


$$\|\mathtt{R}\|^2 = \|\mathtt{R}'\|^2 = 3$$

Si le maillage est symétrique par rapport aux deux axes, alors $\mathtt{T}(V^h) \subset V^h$.

La difficulté des coins

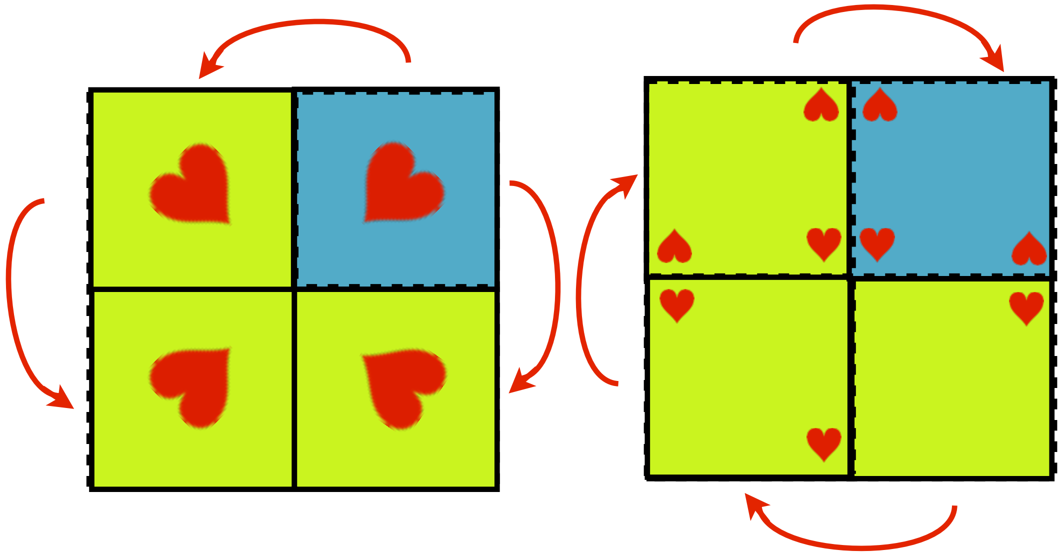
Pour le cas particulier d'un angle droit.
Un autre opérateur $\mathtt{T}$ optimal a été proposé à base de symétries.



Nicaise et Venel (2011).

$$\mathtt{T}u = \begin{cases} u_\mathrm{d} & \text{dans } \Omega_\mathrm{d} \\ -u_\mathrm{m} + 2\mathtt{R}u_\mathrm{d} & \text{dans } \Omega_\mathrm{m} \end{cases}$$

$\mathtt{R}$ est construit à partir de symétries axiales.



$$\|\mathtt{R}\|^2 = \|\mathtt{R}'\|^2 = 3$$

Si le maillage est symétrique par rapport aux deux axes, alors $\mathtt{T}(V^h) \subset V^h$.

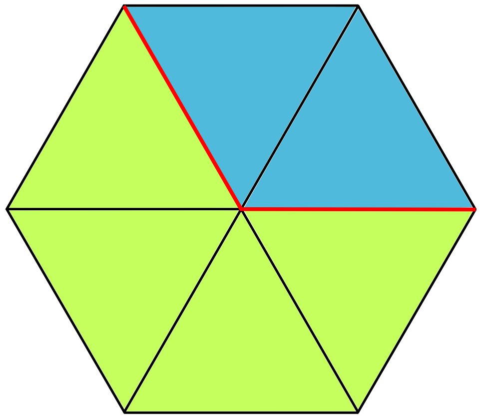
Idée : généraliser ces opérateurs $\mathtt{R}$ à base d'isométries pour tout angle.

Bonnet-Ben Dhia, C. et Ciarlet en préparation (2015).

Opérateur de pliage et règles de pavage

On généralise cette méthode de pliage en utilisant des symétries et des rotations.

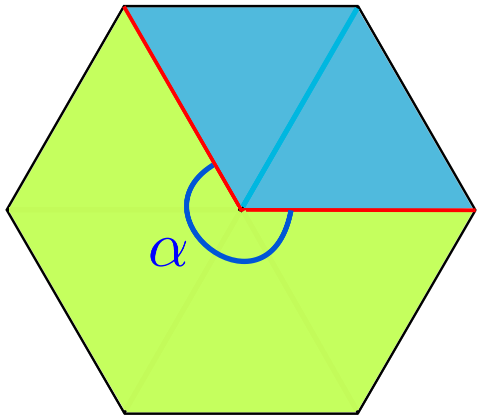
Exemple d'opérateur de pliage de Ω_m vers Ω_d pour un angle $\alpha = \dfrac{4\pi}{3}$.



Opérateur de pliage et règles de pavage

On généralise cette méthode de pliage en utilisant des symétries et des rotations.

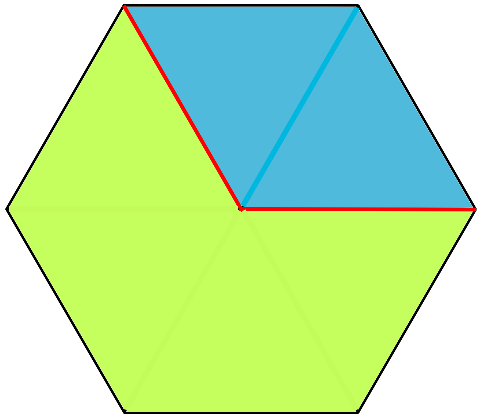
Exemple d'opérateur de pliage de Ω_{m} vers Ω_{d} pour un angle $\alpha = \dfrac{4\pi}{3}$.



Opérateur de pliage et règles de pavage

On généralise cette méthode de pliage en utilisant des symétries et des rotations.

Exemple d'opérateur de pliage de Ω_{m} vers Ω_{d} pour un angle $\alpha = \dfrac{4\pi}{3}$.

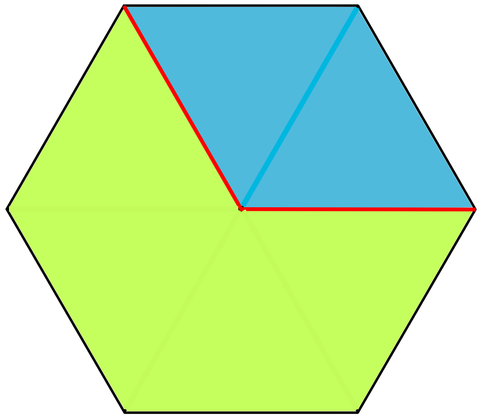


Opérateur de pliage et règles de pavage

On généralise cette méthode de pliage en utilisant des symétries et des rotations.

Exemple d'opérateur de pliage de Ω_m vers Ω_d pour un angle $\alpha = \dfrac{4\pi}{3}$.

$\mathtt{R}u$ doit être continu.

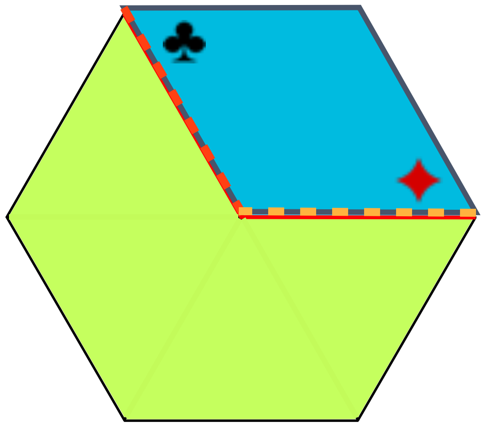


Opérateur de pliage et règles de pavage

On généralise cette méthode de pliage en utilisant des symétries et des rotations.

Exemple d'opérateur de pliage de Ω_{m} vers Ω_{d} pour un angle $\alpha = \dfrac{4\pi}{3}$.

$\mathtt{R}u$ doit être continu.

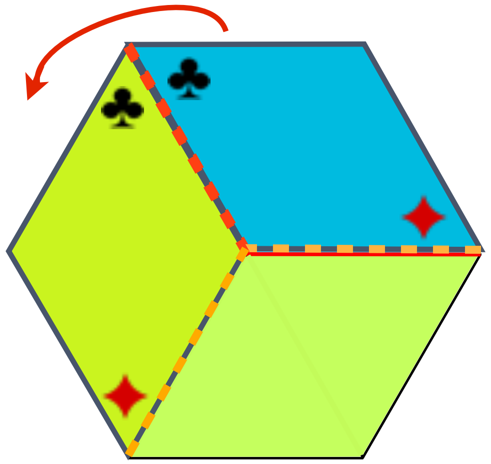


Opérateur de pliage et règles de pavage

On généralise cette méthode de pliage en utilisant des symétries et des rotations.

Exemple d'opérateur de pliage de Ω_{m} vers Ω_{d} pour un angle $\alpha = \dfrac{4\pi}{3}$.

$\mathtt{R}u$ doit être continu.

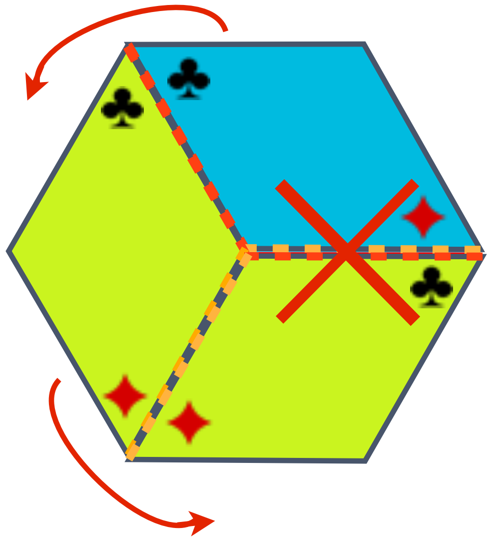


Opérateur de pliage et règles de pavage

On généralise cette méthode de pliage en utilisant des symétries et des rotations.

Exemple d'opérateur de pliage de Ω_{m} vers Ω_{d} pour un angle $\alpha = \dfrac{4\pi}{3}$.

$\mathtt{R}u$ doit être continu.

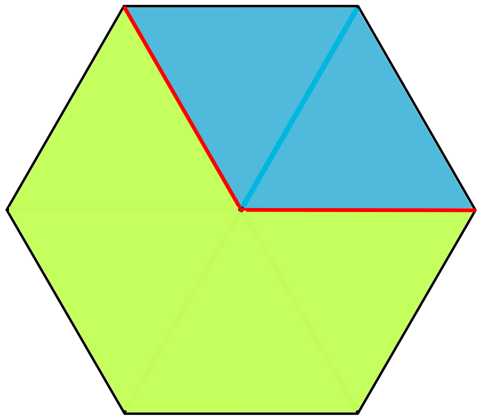


Opérateur de pliage et règles de pavage

On généralise cette méthode de pliage en utilisant des symétries et des rotations.

Exemple d'opérateur de pliage de Ω_{m} vers Ω_{d} pour un angle $\alpha = \dfrac{4\pi}{3}$.

$\mathtt{R}u$ doit être continu.

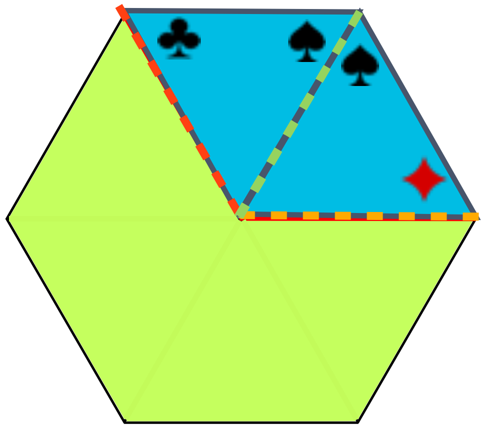


Opérateur de pliage et règles de pavage

On généralise cette méthode de pliage en utilisant des symétries et des rotations.

Exemple d'opérateur de pliage de Ω_m vers Ω_d pour un angle $\alpha = \dfrac{4\pi}{3}$.

$\mathtt{R}u$ doit être continu.

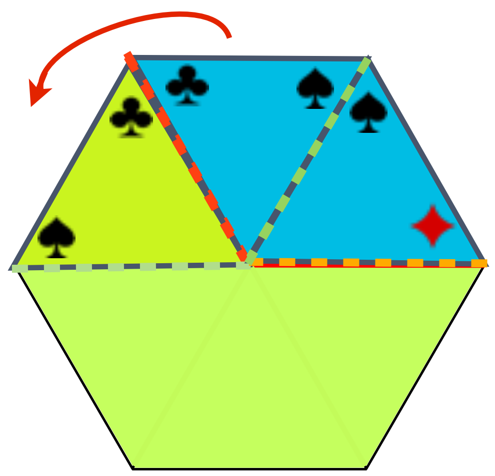


Opérateur de pliage et règles de pavage

On généralise cette méthode de pliage en utilisant des symétries et des rotations.

Exemple d'opérateur de pliage de Ω_{m} vers Ω_{d} pour un angle $\alpha = \dfrac{4\pi}{3}$.

$\mathtt{R}u$ doit être continu.

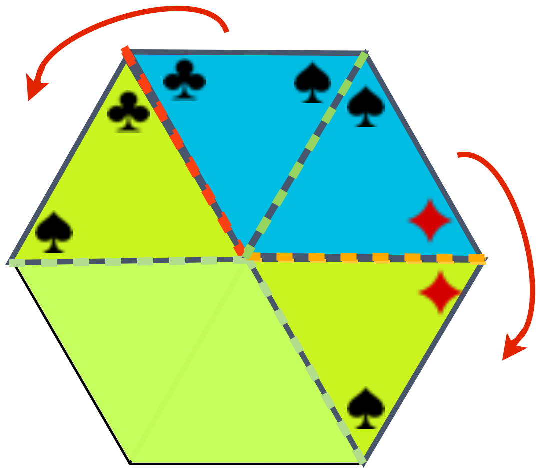


Opérateur de pliage et règles de pavage

On généralise cette méthode de pliage en utilisant des symétries et des rotations.

Exemple d'opérateur de pliage de Ω_{m} vers Ω_{d} pour un angle $\alpha = \dfrac{4\pi}{3}$.

$\mathtt{R}u$ doit être continu.

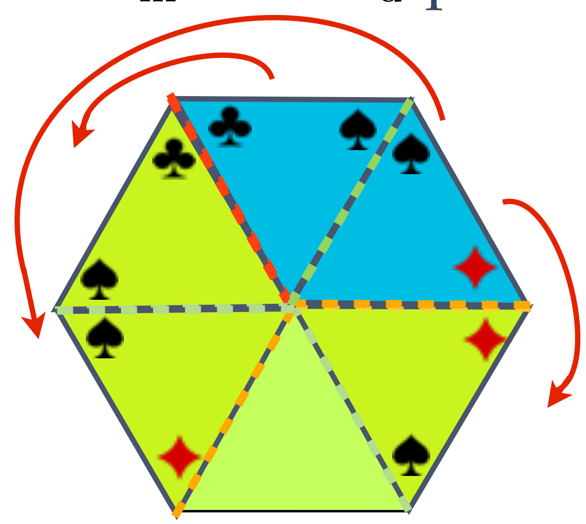


Opérateur de pliage et règles de pavage

On généralise cette méthode de pliage en utilisant des symétries et des rotations.

Exemple d'opérateur de pliage de Ω_{m} vers Ω_{d} pour un angle $\alpha = \dfrac{4\pi}{3}$.

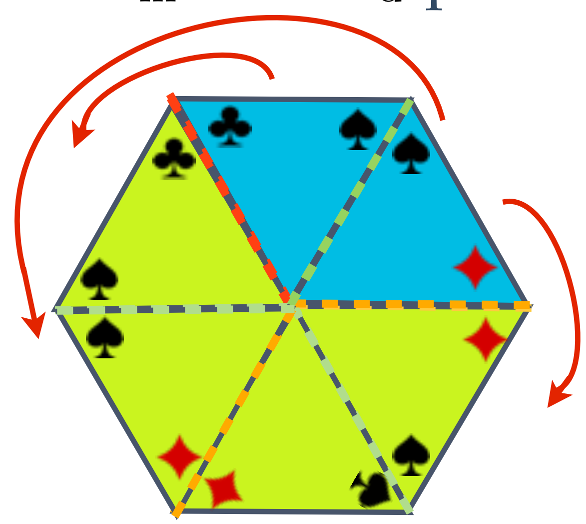
$\mathtt{R}u$ doit être continu.



Opérateur de pliage et règles de pavage

On généralise cette méthode de pliage en utilisant des symétries et des rotations.

Exemple d'opérateur de pliage de Ω_m vers Ω_d pour un angle $\alpha = \dfrac{4\pi}{3}$.

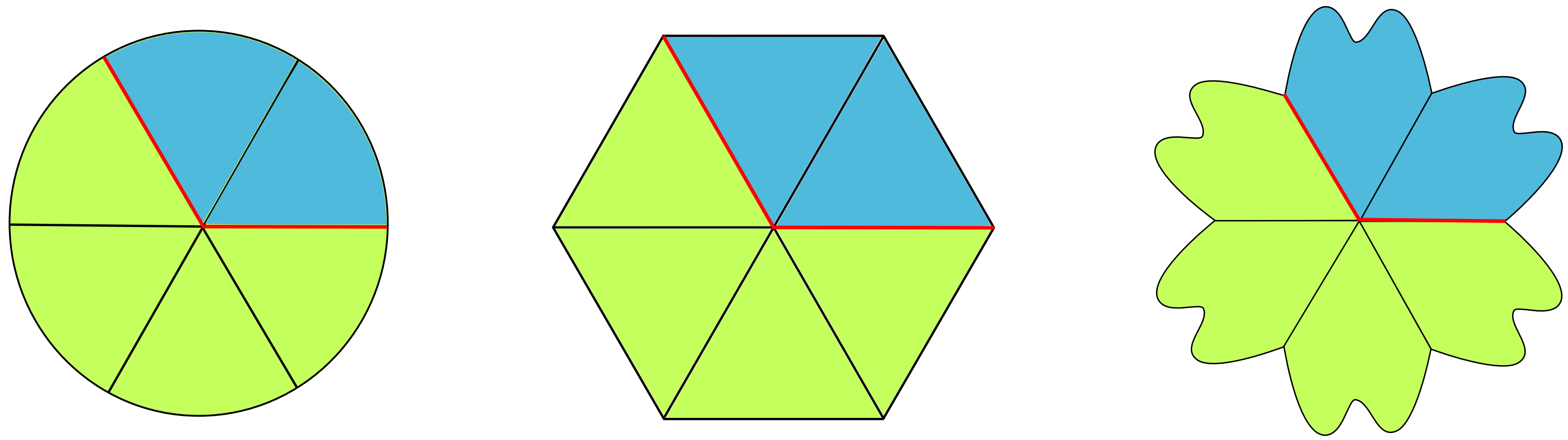


$\mathtt{R}u$ doit être continu.

Opérateur de pliage et règles de pavage

On généralise cette méthode de pliage en utilisant des symétries et des rotations.

Exemple d'opérateur de pliage de Ω_{m} vers Ω_{d} pour un angle $\alpha = \dfrac{4\pi}{3}$.

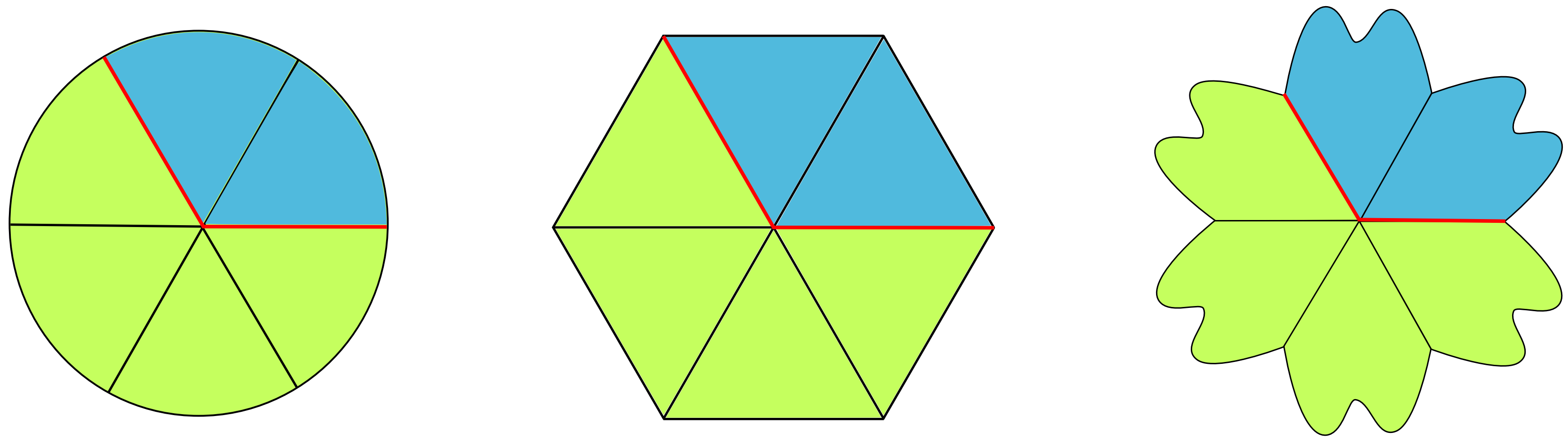


Une fois le motif trouvé, pour toute forme, le maillage est construit à partir de ce motif répété.

Opérateur de pliage et règles de pavage

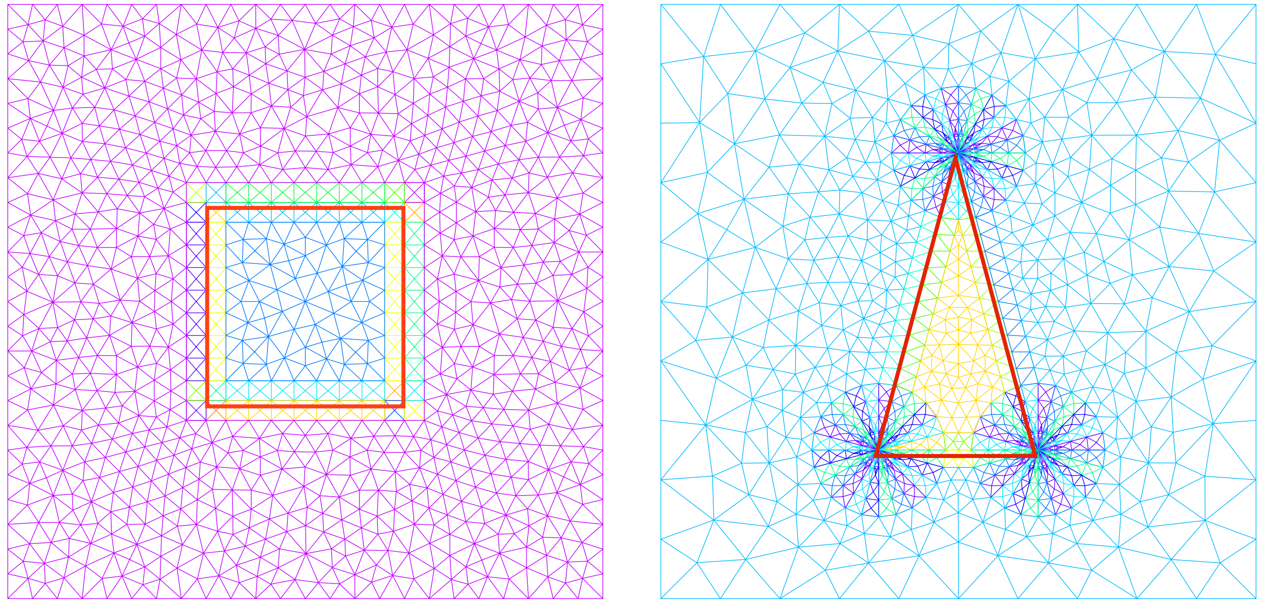
On généralise cette méthode de pliage en utilisant des symétries et des rotations.

Exemple d'opérateur de pliage de Ω_m vers Ω_d pour un angle $\alpha = \dfrac{4\pi}{3}$.



Une fois le motif trouvé, pour toute forme, le maillage est construit à partir de ce motif répété.

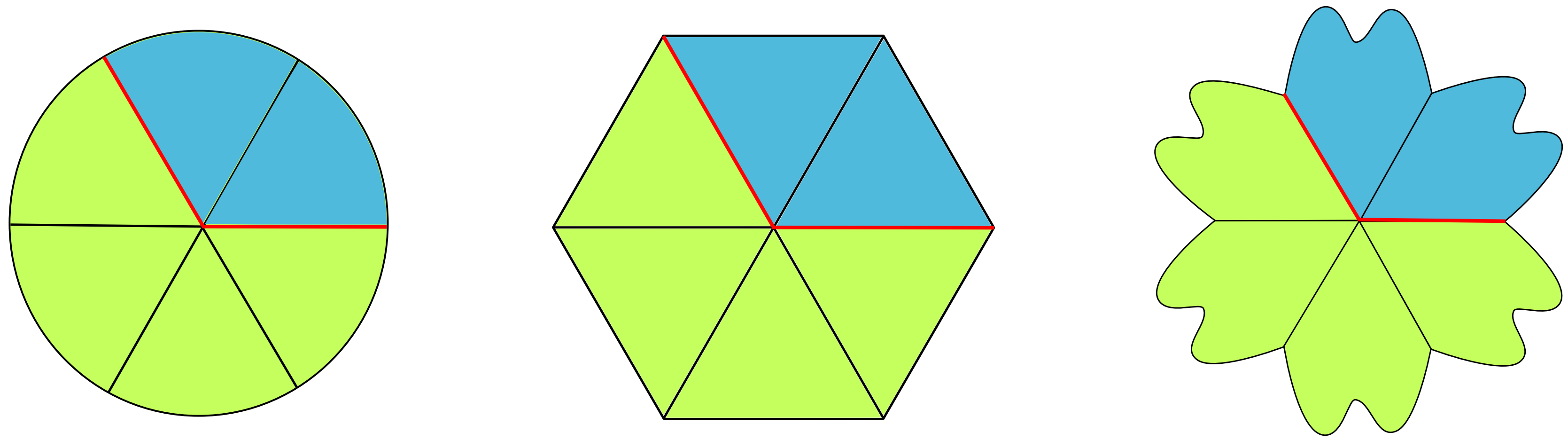
Pour une interface polygonale, on applique ce principe localement.



Opérateur de pliage et règles de pavage

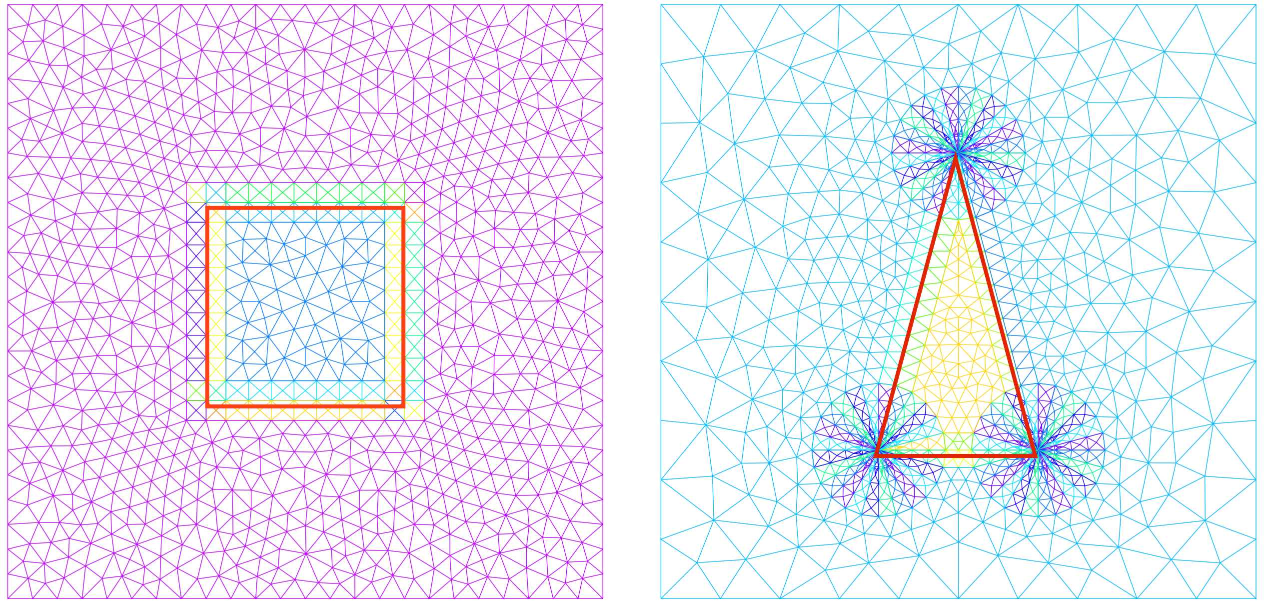
On généralise cette méthode de pliage en utilisant des symétries et des rotations.

Exemple d'opérateur de pliage de Ω_m vers Ω_d pour un angle $\alpha = \dfrac{4\pi}{3}$.



Une fois le motif trouvé, pour toute forme, le maillage est construit à partir de ce motif répété.

Pour une interface polygonale, on applique ce principe localement.

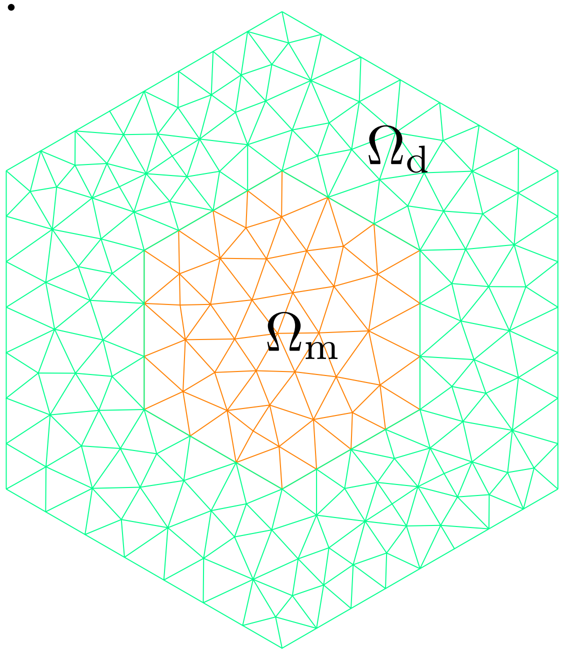


Théorème. Pour tout angle $\alpha \in 2\pi\mathbb{Q}$, si l'on maille localement à partir d'un motif reproduit par symétrie, alors $\mathtt{T}(V^h) \subset V^h$.

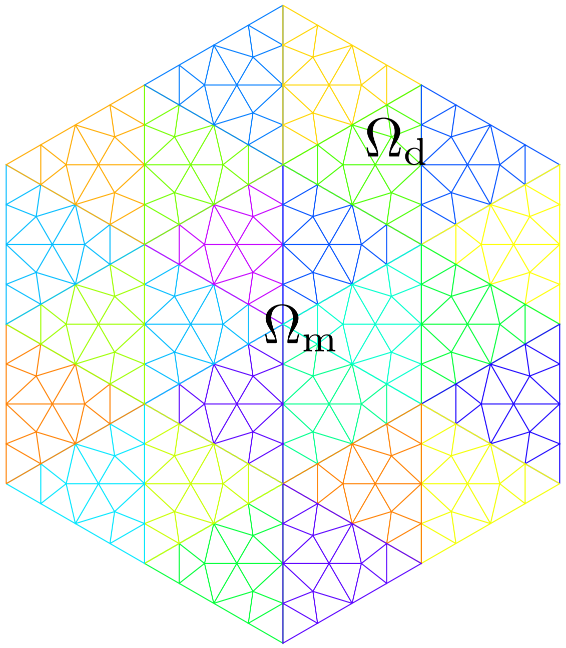
Application au problème de valeurs propres

Trouver $(u,\lambda) \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\} \times \mathbb{C}$ tels que :

$$-\operatorname{div}(\varepsilon^{-1}\nabla u) = \lambda \mu u \quad \text{dans } \Omega,$$



maillage standard



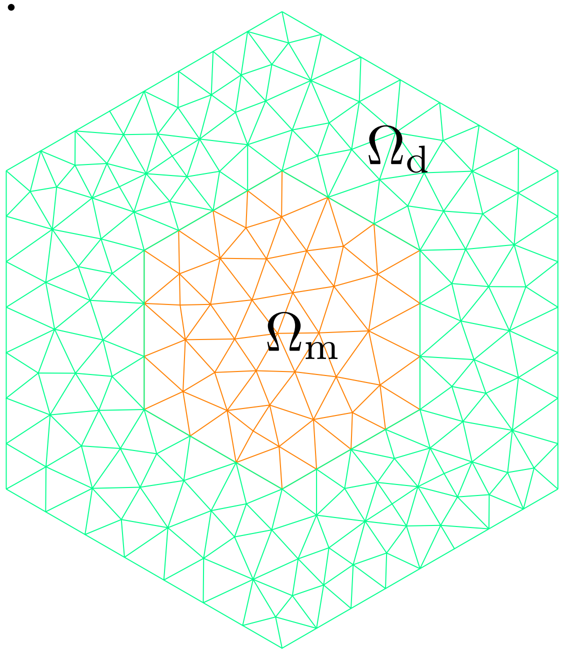
maillage T-conforme

Application au problème de valeurs propres

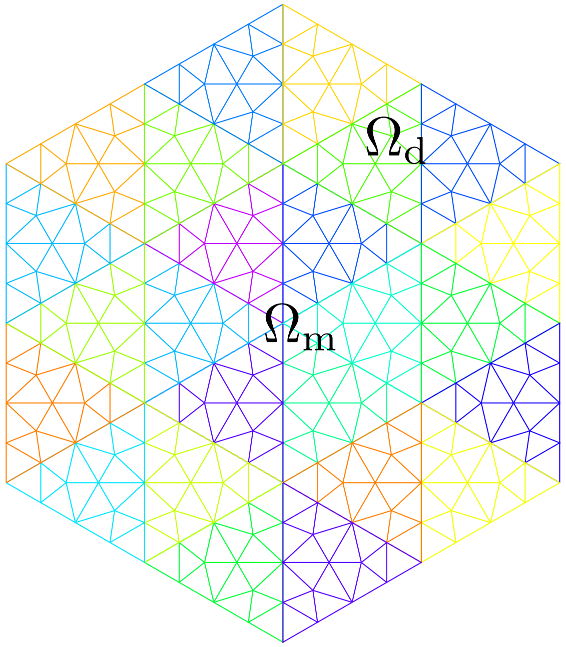
Trouver $(u, \lambda) \in H^1_0(\Omega) \setminus \{0\} \times \mathbb{C}$ tels que :

$$-\operatorname{div}(\varepsilon^{-1}\nabla u) = \lambda \mu u \quad \text{dans } \Omega,$$

On utilise des Éléments Finis de Lagrange d'ordre 1, 2, 3.



maillage standard



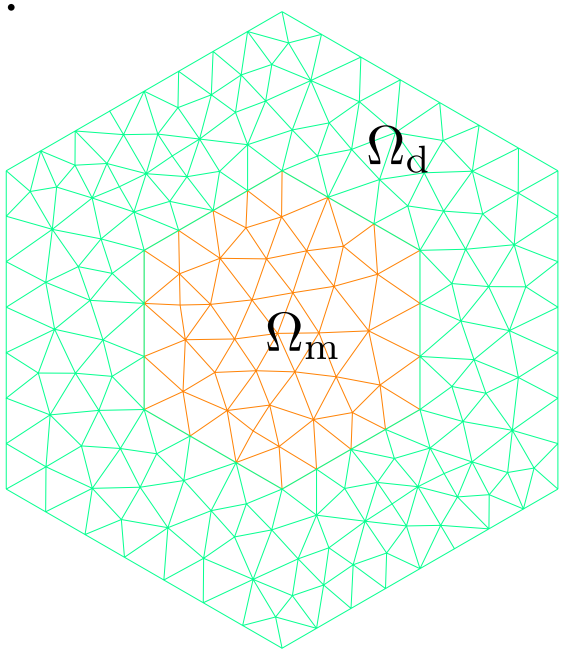
maillage T-conforme

Application au problème de valeurs propres

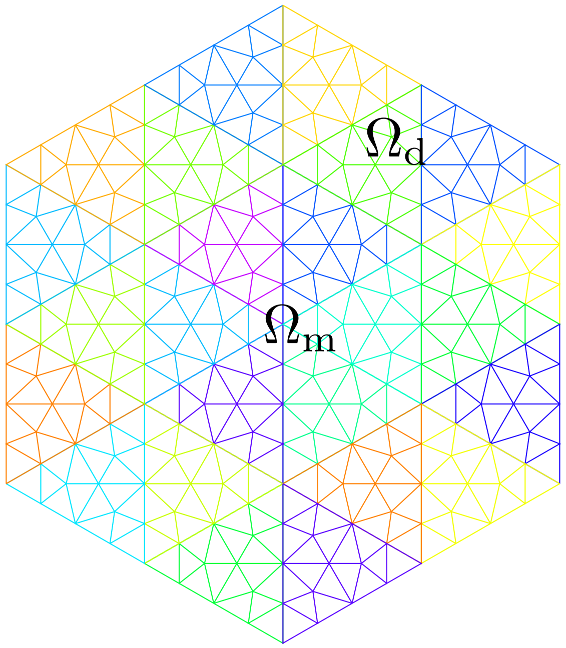
Trouver $(u, \lambda) \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\} \times \mathbb{C}$ tels que :

$$- \operatorname{div}(\varepsilon^{-1} \nabla u) = \lambda \mu u \quad \text{dans } \Omega,$$

On utilise des Éléments Finis de Lagrange d'ordre 1, 2, 3.

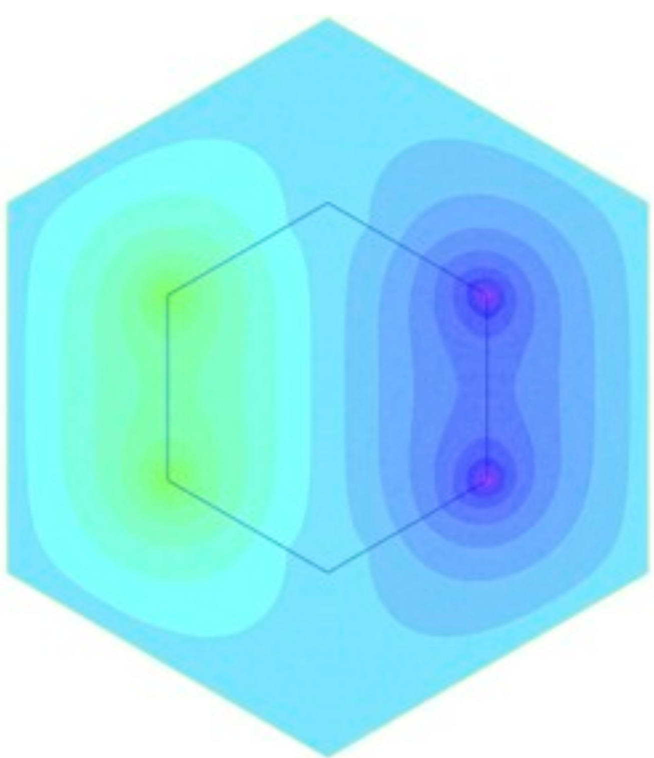


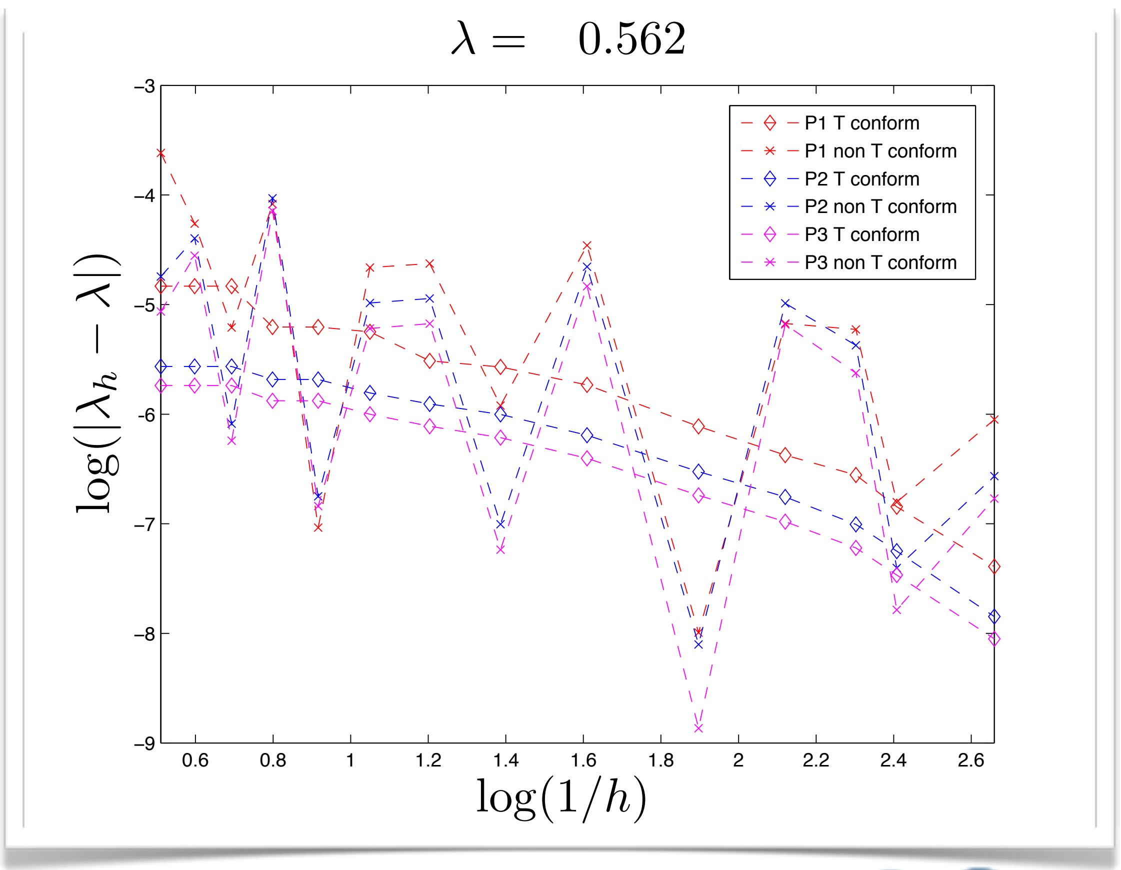
maillage standard



maillage T-conforme

Pour une valeur propre positive :



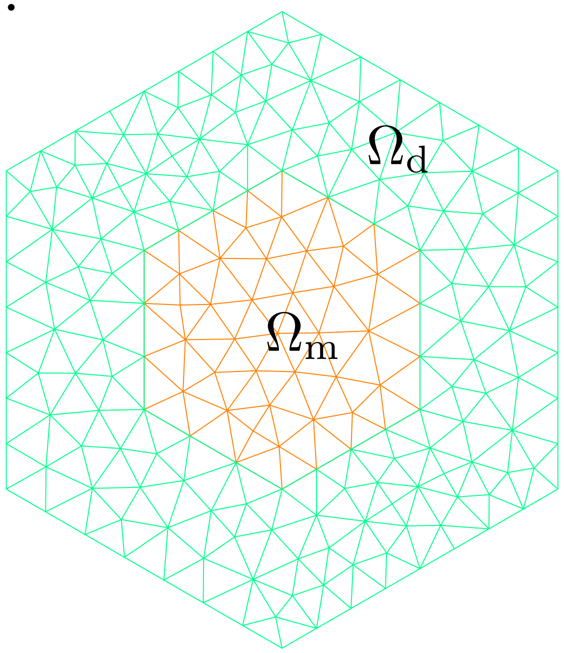


Application au problème de valeurs propres

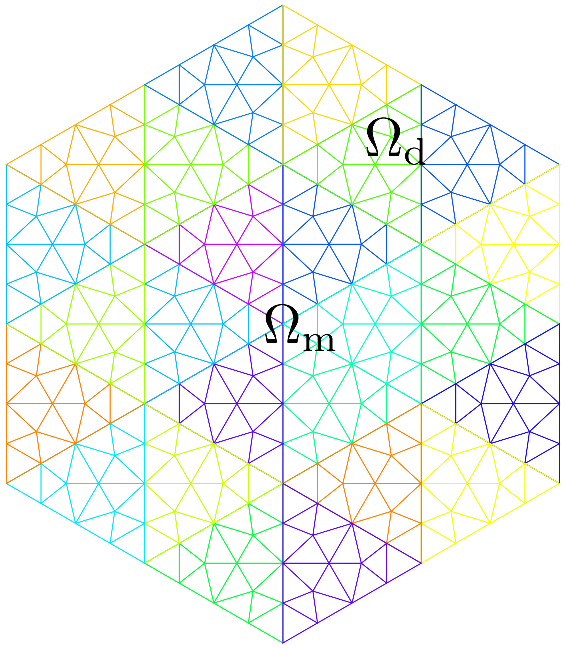
Trouver $(u, \lambda) \in H^1_0(\Omega) \setminus \{0\} \times \mathbb{C}$ tels que :

$$-\operatorname{div}(\varepsilon^{-1}\nabla u) = \lambda \mu u \quad \text{dans } \Omega,$$

On utilise des Éléments Finis de Lagrange d'ordre 1, 2, 3.

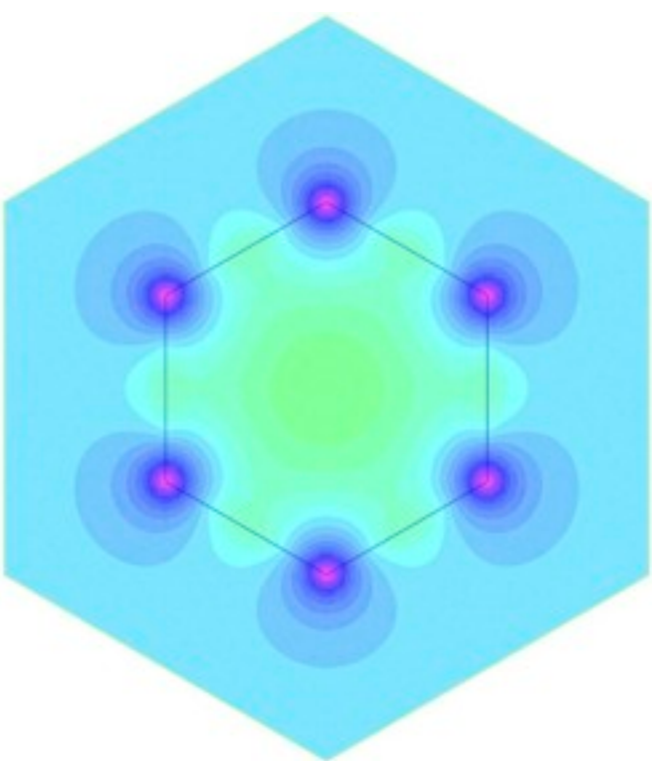


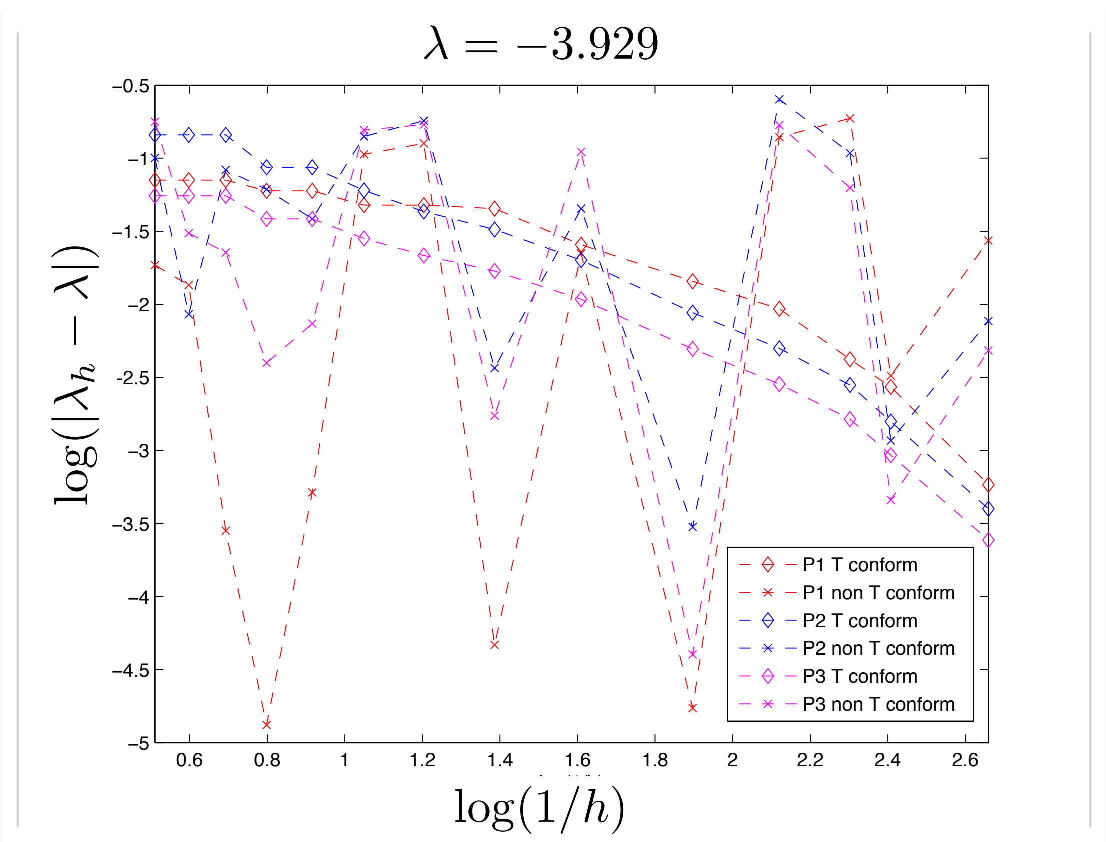
maillage standard



maillage T-conforme

Pour une valeur propre négative :

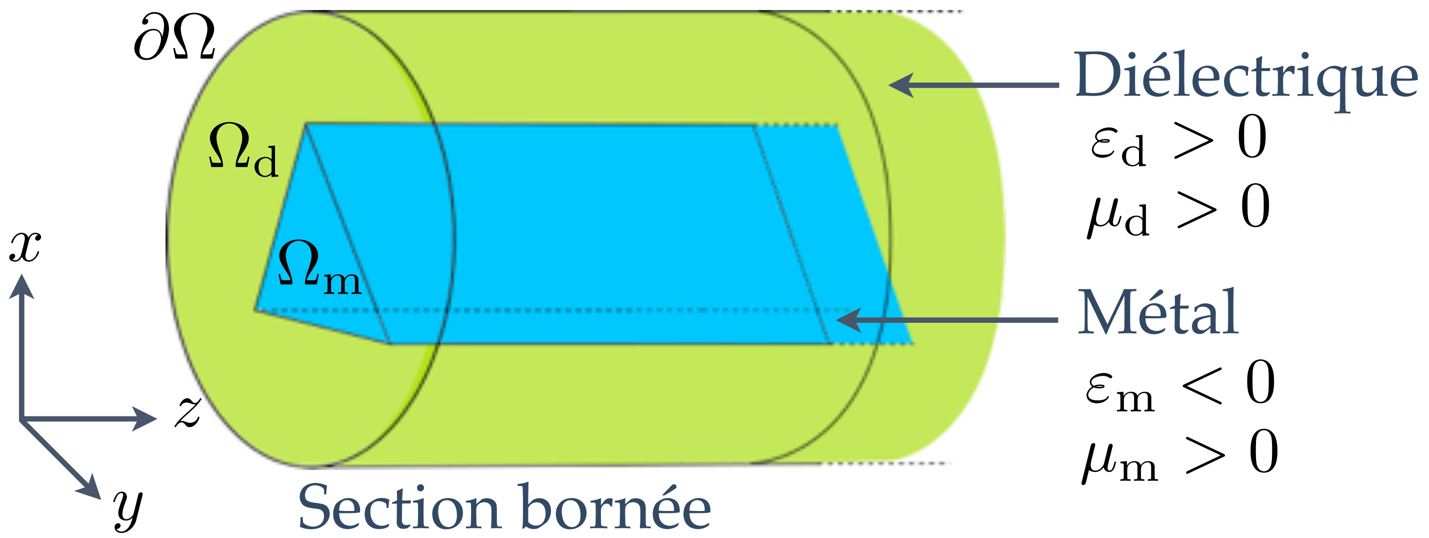




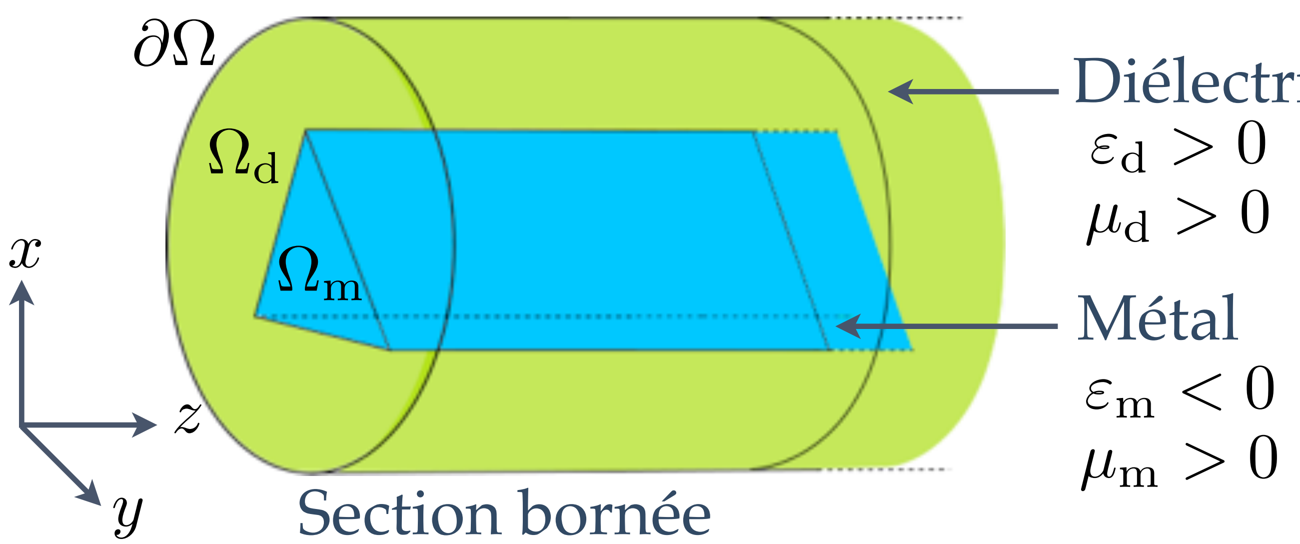
Sommaire

- Partie II : le guide d'ondes plasmonique scalaire
  - Étude hors intervalle critique
  - Étude dans l'intervalle critique

Le guide d'ondes plasmonique scalaire



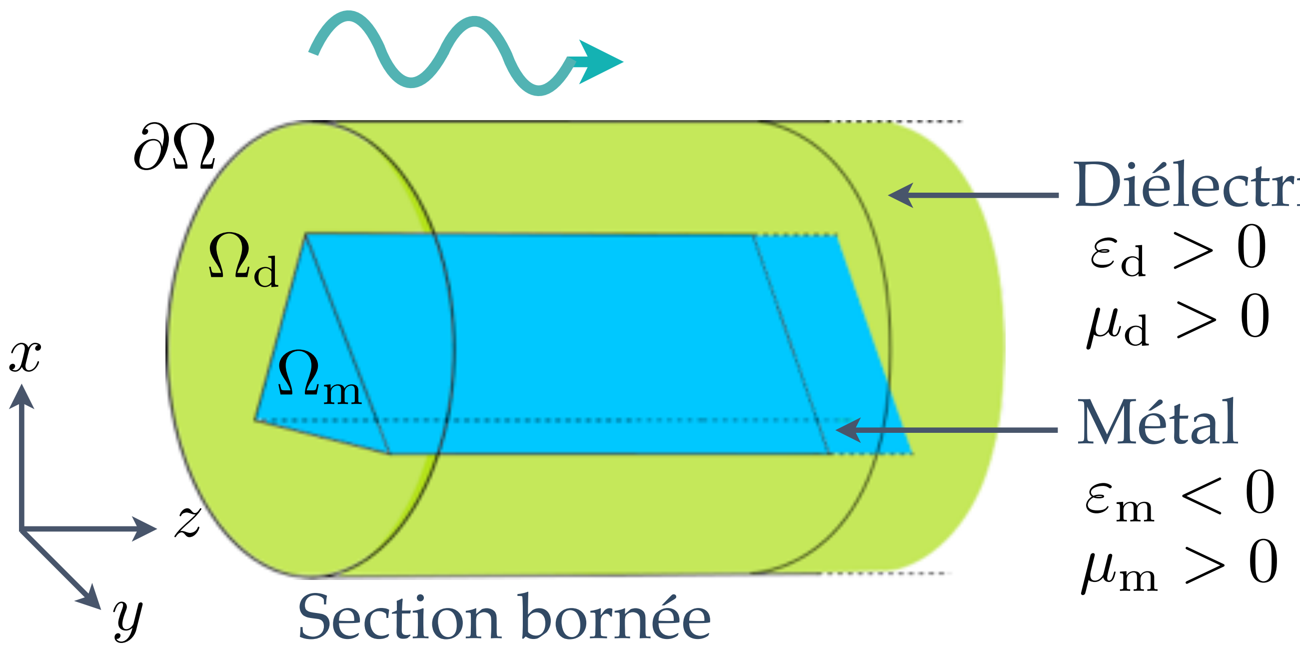
Le guide d'ondes plasmonique scalaire



Modèle scalaire simplifié :

$$\left|\begin{array}{rl} \operatorname{div}\left(\varepsilon^{-1}\nabla u\right) + \omega^2 \mu u = 0 & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R} \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times \mathbb{R} \end{array}\right.$$

Le guide d'ondes plasmonique scalaire



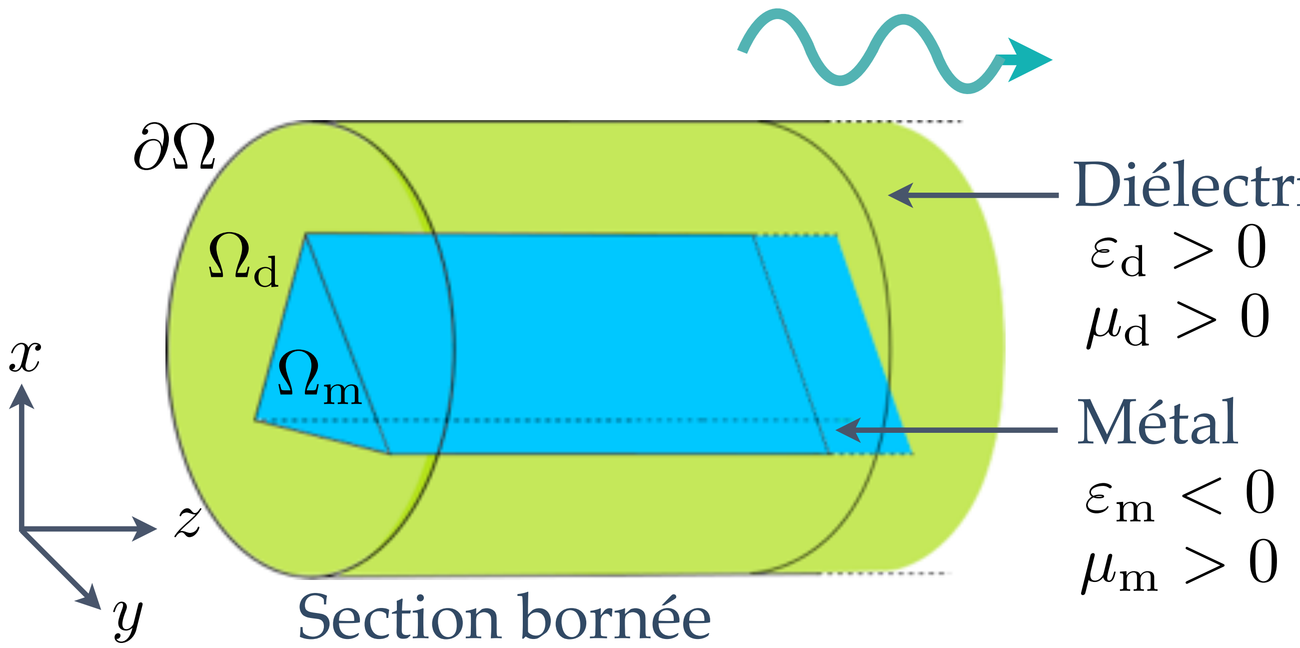
Modèle scalaire simplifié :

$$\left|\begin{array}{rl} \operatorname{div}\left(\varepsilon^{-1}\nabla u\right) + \omega^2 \mu u = 0 & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R} \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times \mathbb{R} \end{array}\right.$$

On cherche les ondes se propageant selon z :

$$u(x,y,z,t) = \widetilde{u}(x,y)e^{i(\beta z - \omega t)} \quad \beta,\, \omega \in \mathbb{R}$$

Le guide d'ondes plasmonique scalaire

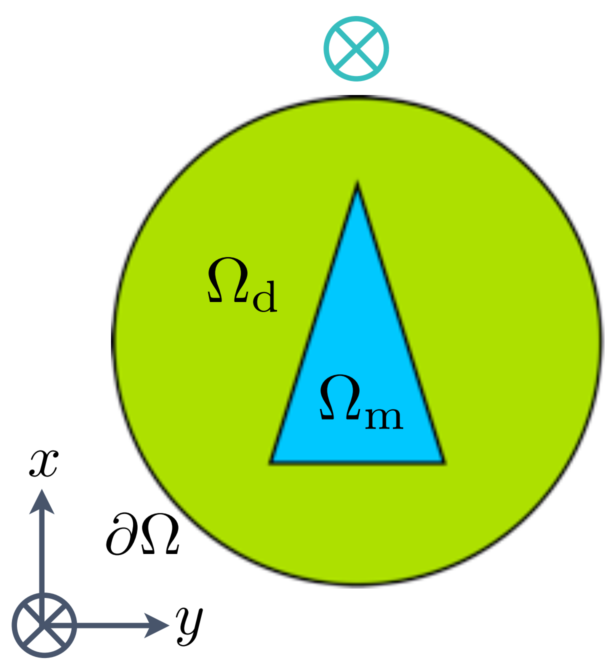


Modèle scalaire simplifié :

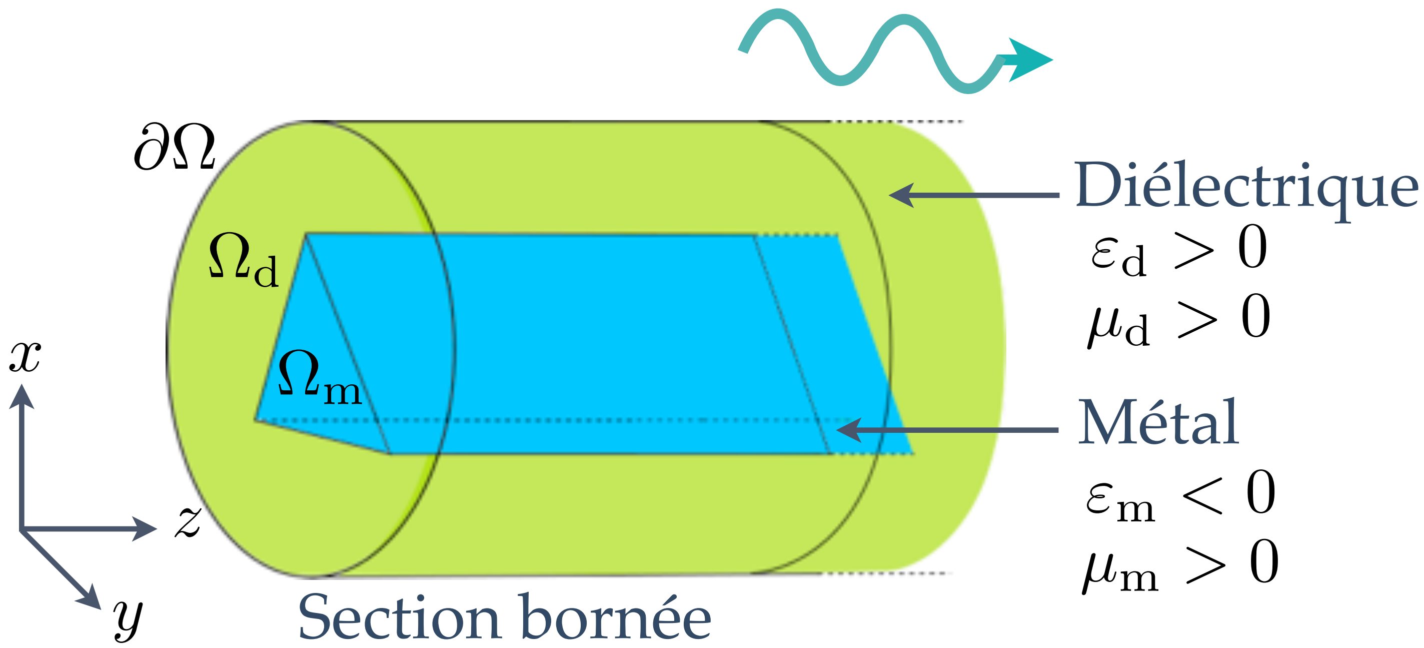
$$\left|\begin{array}{rl} \operatorname{div}\left(\varepsilon^{-1}\nabla u\right) + \omega^2 \mu u = 0 & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R} \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times \mathbb{R} \end{array}\right.$$

On cherche les ondes se propageant selon z :

$$u(x, y, z, t) = \widetilde{u}(x, y) e^{i(\beta z - \omega t)} \qquad \beta, \omega \in \mathbb{R}$$



Le guide d'ondes plasmonique scalaire

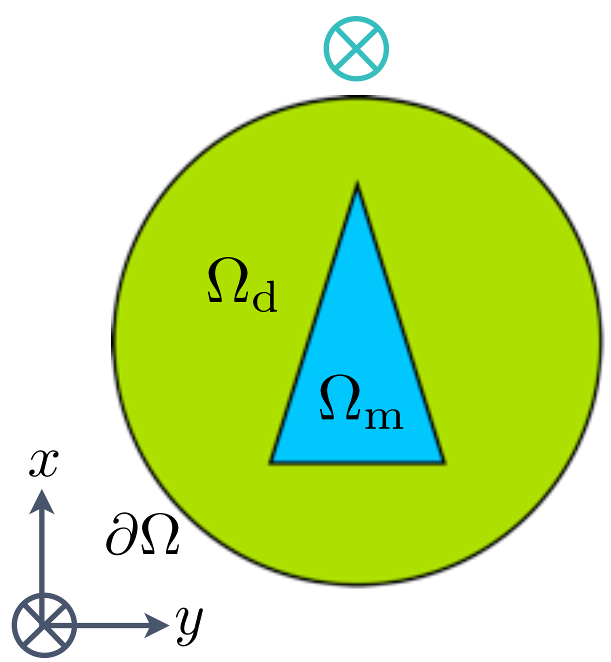


Modèle scalaire simplifié :

$$\left| \begin{aligned} \operatorname{div}\left(\varepsilon^{-1}\nabla u\right) + \omega^2 \mu u &= 0 \quad \text{dans } \Omega \times \mathbb{R} \\ u &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times \mathbb{R} \end{aligned} \right.$$

On cherche les ondes se propageant selon z :

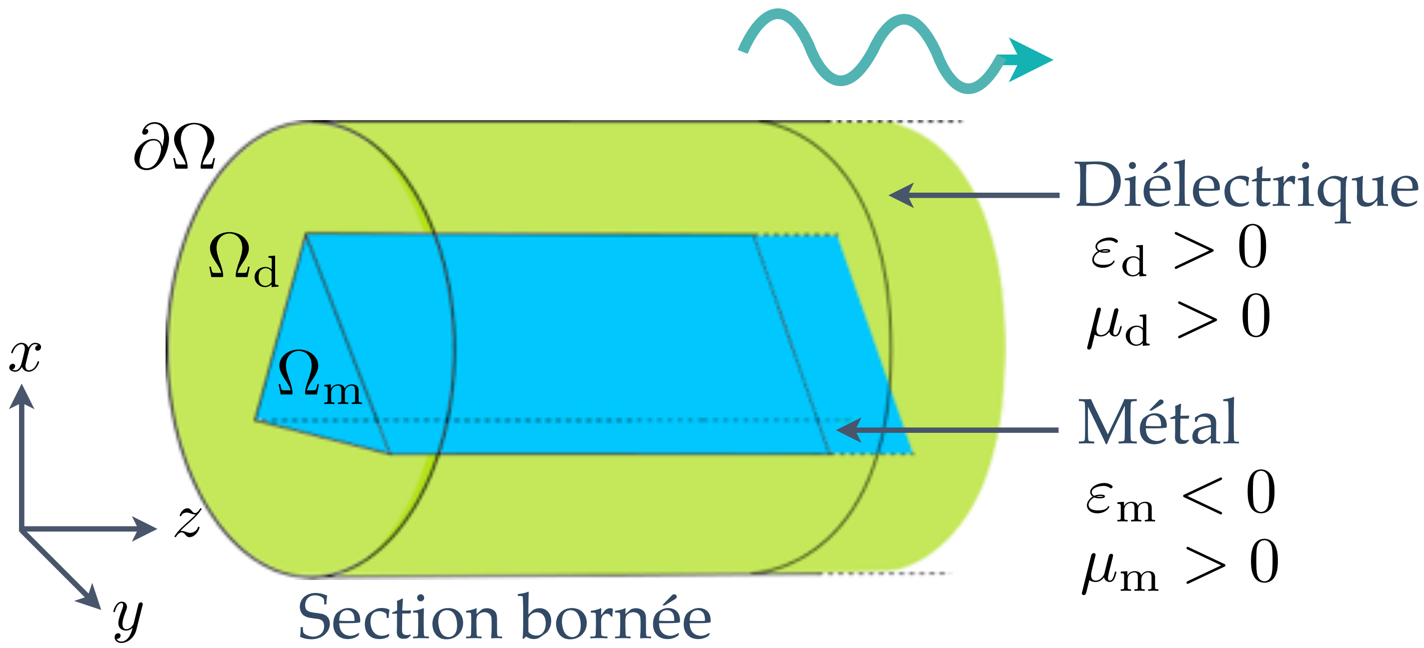
$$u(x,y,z,t) = \widetilde{u}(x,y)e^{i(\beta z - \omega t)} \qquad \beta,\ \omega \in \mathbb{R}$$



Réduction à un problème de valeurs propres 2D :

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{div}\left(\varepsilon^{-1}\nabla \widetilde{u}\right) - \beta^2 \varepsilon^{-1}\widetilde{u} + \omega^2 \mu \widetilde{u} &= 0 \quad \Omega \\ \widetilde{u} &= 0 \quad \partial\Omega \end{aligned}}$$

Le guide d'ondes plasmonique scalaire

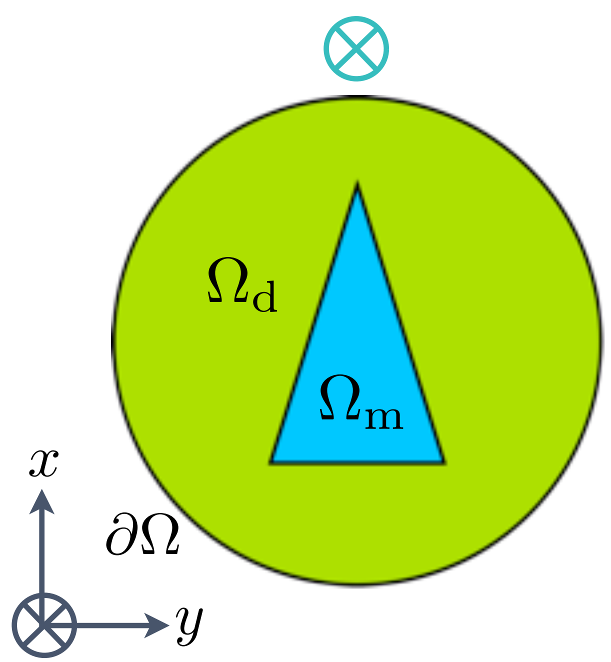


Modèle scalaire simplifié :

$$\left|\begin{aligned} \operatorname{div}\left(\varepsilon^{-1}\nabla u\right) + \omega^2 \mu u &= 0 \quad \text{dans } \Omega \times \mathbb{R} \\ u &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times \mathbb{R} \end{aligned}\right.$$

On cherche les ondes se propageant selon z :

$$u(x,y,z,t) = \widetilde{u}(x,y)e^{i(\beta z - \omega t)} \qquad \beta,\ \omega \in \mathbb{R}$$

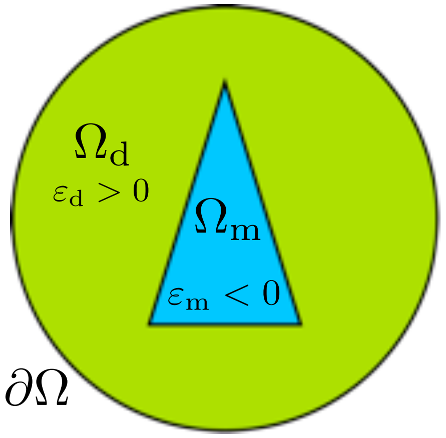


Réduction à un problème de valeurs propres 2D :

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{div}\left(\varepsilon^{-1}\nabla \widetilde{u}\right) - \beta^2 \varepsilon^{-1}\widetilde{u} + \omega^2 \mu \widetilde{u} &= 0 \quad \Omega \\ \widetilde{u} &= 0 \quad \partial\Omega \end{aligned}}$$

But : déterminer $(\widetilde{u}, \beta, \omega)$.

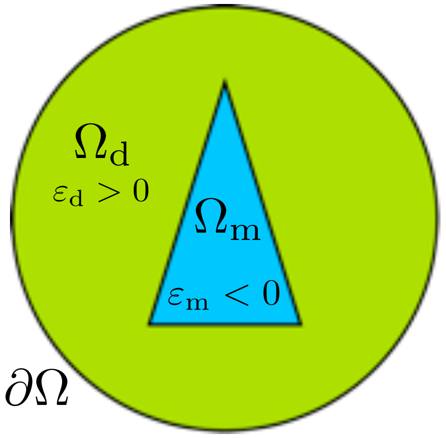
Problème de valeurs propres



$$\begin{aligned} \operatorname{div}\left(\varepsilon^{-1}\nabla\widetilde{u}\right) - \beta^2\varepsilon^{-1}\widetilde{u} + \omega^2\mu\widetilde{u} &= 0 \quad \Omega \\ \widetilde{u} &= 0 \quad \partial\Omega \end{aligned}$$

$$\boxed{\mu > 0}$$

Problème de valeurs propres

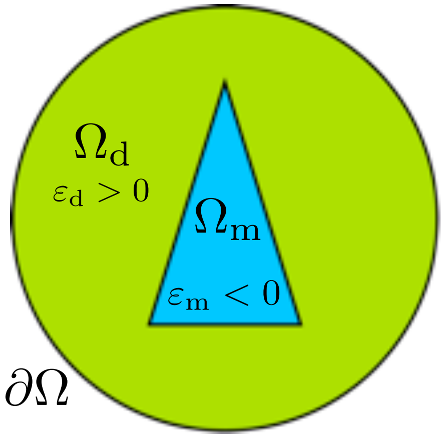


$$\begin{aligned} \operatorname{div}\left(\varepsilon^{-1}\nabla\widetilde{u}\right) - \beta^2\varepsilon^{-1}\widetilde{u} + \omega^2\mu\widetilde{u} = 0 \quad & \Omega \\ \widetilde{u} = 0 \quad & \partial\Omega \end{aligned}$$

$$\boxed{\mu > 0}$$

Deux façons d'étudier le problème:

Problème de valeurs propres



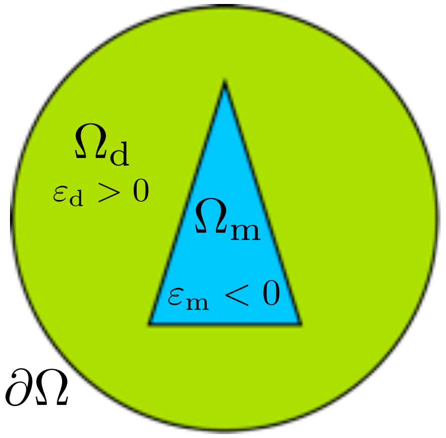
$$\begin{aligned} \operatorname{div}\left(\varepsilon^{-1}\nabla\widetilde{u}\right) - \beta^2\varepsilon^{-1}\widetilde{u} + \omega^2\mu\widetilde{u} &= 0 \quad \Omega \\ \widetilde{u} &= 0 \quad \partial\Omega \end{aligned}$$

$$\boxed{\mu > 0}$$

Deux façons d'étudier le problème:

-pour une fréquence ω, trouver $(\tilde{u}, \beta^2)$ tel que $A(\omega)\widetilde{u} = \beta^2\varepsilon^{-1}\widetilde{u}$

Problème de valeurs propres



$$\operatorname{div}\left(\varepsilon^{-1}\nabla\widetilde{u}\right) - \beta^2\varepsilon^{-1}\widetilde{u} + \omega^2\mu\widetilde{u} = 0 \quad \Omega$$
$$\widetilde{u} = 0 \quad \partial\Omega$$

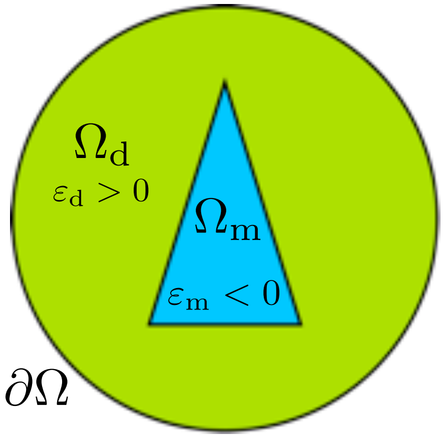
$$\boxed{\mu > 0}$$

Deux façons d'étudier le problème:

-pour une fréquence ω, trouver $(\tilde{u}, \beta^2)$ tel que $A(\omega)\widetilde{u} = \beta^2\varepsilon^{-1}\widetilde{u}$

-pour un nombre d'onde β, trouver $(\tilde{u}, \omega^2)$ tel que $A(\beta)\widetilde{u} = \omega^2\widetilde{u}$

Problème de valeurs propres



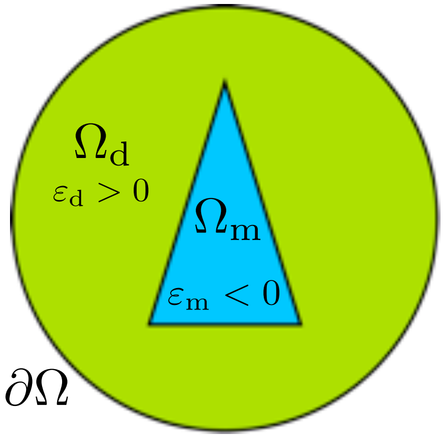
$$\begin{aligned} \operatorname{div}\left(\varepsilon^{-1}\nabla\widetilde{u}\right) - \beta^2\varepsilon^{-1}\widetilde{u} + \omega^2\mu\widetilde{u} = 0 \quad & \Omega \\ \widetilde{u} = 0 \quad & \partial\Omega \end{aligned} \qquad \boxed{\mu > 0}$$

Deux façons d'étudier le problème:

-pour une fréquence ω, trouver $(\tilde{u}, \beta^2)$ tel que $A(\omega)\widetilde{u} = \beta^2\varepsilon^{-1}\widetilde{u}$

-pour un nombre d'onde β, trouver $(\tilde{u}, \omega^2)$ tel que $\boxed{A(\beta)\widetilde{u} = \omega^2\widetilde{u}}$

Problème de valeurs propres



$$\begin{aligned} \operatorname{div}\left(\varepsilon^{-1}\nabla\widetilde{u}\right) - \beta^2\varepsilon^{-1}\widetilde{u} + \omega^2\mu\widetilde{u} &= 0 \quad \Omega \\ \widetilde{u} &= 0 \quad \partial\Omega \end{aligned} \qquad \boxed{\mu > 0}$$

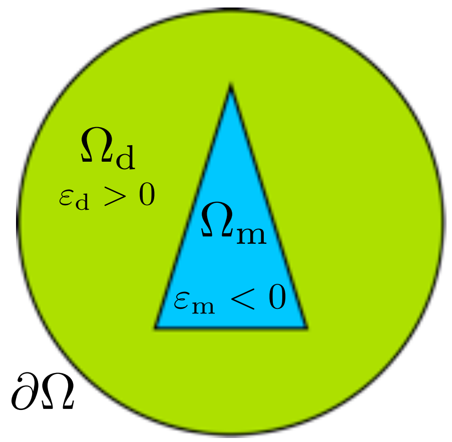
Deux façons d'étudier le problème:

-pour une fréquence ω, trouver $(\tilde{u}, \beta^2)$ tel que $A(\omega)\widetilde{u} = \beta^2\varepsilon^{-1}\widetilde{u}$

-pour un nombre d'onde β, trouver $(\tilde{u}, \omega^2)$ tel que $\boxed{A(\beta)\widetilde{u} = \omega^2\widetilde{u}}$

On étudie le problème de valeurs propres:

Problème de valeurs propres



$$\begin{aligned} \operatorname{div}\left(\varepsilon^{-1}\nabla\widetilde{u}\right) - \beta^2\varepsilon^{-1}\widetilde{u} + \omega^2\mu\widetilde{u} = 0 \quad & \Omega \\ \widetilde{u} = 0 \quad & \partial\Omega \end{aligned} \qquad \boxed{\mu > 0}$$

Deux façons d'étudier le problème:

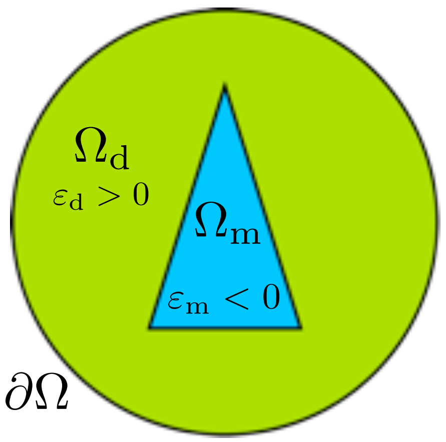
-pour une fréquence ω, trouver $(\tilde{u}, \beta^2)$ tel que $A(\omega)\widetilde{u} = \beta^2\varepsilon^{-1}\widetilde{u}$

-pour un nombre d'onde β, trouver $(\tilde{u}, \omega^2)$ tel que $\boxed{A(\beta)\widetilde{u} = \omega^2\widetilde{u}}$

On étudie le problème de valeurs propres:

$$\left| \begin{array}{l} \text{Pour } \beta \in \mathbb{R}, \text{ Trouver } (\widetilde{u}, \omega) \in D(A) \setminus \{0\} \times \mathbb{C} \text{ tels que :} \\ A(\beta)\widetilde{u} := -\mu^{-1}\left(\operatorname{div}\left(\varepsilon^{-1}\nabla\widetilde{u}\right) - \beta^2\varepsilon^{-1}\widetilde{u}\right) = \omega^2\widetilde{u} \end{array} \right.$$

Problème de valeurs propres



$$\begin{aligned} \operatorname{div}\left(\varepsilon^{-1}\nabla\widetilde{u}\right) - \beta^2\varepsilon^{-1}\widetilde{u} + \omega^2\mu\widetilde{u} &= 0 \quad \Omega \\ \widetilde{u} &= 0 \quad \partial\Omega \end{aligned} \qquad \boxed{\mu > 0}$$

Deux façons d'étudier le problème:

-pour une fréquence ω, trouver $(\tilde{u}, \beta^2)$ tel que $A(\omega)\widetilde{u} = \beta^2\varepsilon^{-1}\widetilde{u}$

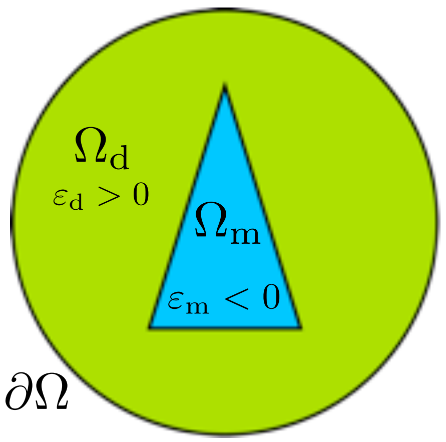
-pour un nombre d'onde β, trouver $(\tilde{u}, \omega^2)$ tel que $\boxed{A(\beta)\widetilde{u} = \omega^2\widetilde{u}}$

On étudie le problème de valeurs propres:

$$\left|\begin{array}{l} \text{Pour } \beta \in \mathbb{R}, \ \text{Trouver } (\widetilde{u}, \omega) \in D(A) \setminus \{0\} \times \mathbb{C} \text{ tels que :} \\ A(\beta)\widetilde{u} := -\mu^{-1}\left(\operatorname{div}\left(\varepsilon^{-1}\nabla\widetilde{u}\right) - \beta^2\varepsilon^{-1}\widetilde{u}\right) = \omega^2\widetilde{u} \end{array}\right.$$

$$D(A) := \{v \in H^1_0(\Omega) |\, \operatorname{div}(\varepsilon^{-1}\nabla v) \in L^2(\Omega)\}$$

Problème de valeurs propres



$$\begin{aligned} \operatorname{div}\left(\varepsilon^{-1}\nabla\widetilde{u}\right) - \beta^2\varepsilon^{-1}\widetilde{u} + \omega^2\mu\widetilde{u} &= 0 \quad \Omega \\ \widetilde{u} &= 0 \quad \partial\Omega \end{aligned} \qquad \boxed{\mu > 0}$$

Deux façons d'étudier le problème:

-pour une fréquence ω, trouver $(\tilde{u}, \beta^2)$ tel que $A(\omega)\widetilde{u} = \beta^2\varepsilon^{-1}\widetilde{u}$

-pour un nombre d'onde β, trouver $(\tilde{u}, \omega^2)$ tel que $\boxed{A(\beta)\widetilde{u} = \omega^2\widetilde{u}}$

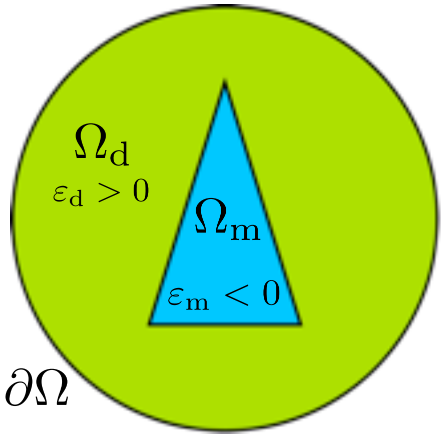
On étudie le problème de valeurs propres:

$$\left| \begin{array}{l} \text{Pour } \beta \in \mathbb{R}, \text{ Trouver } (\widetilde{u}, \omega) \in D(A) \setminus \{0\} \times \mathbb{C} \text{ tels que :} \\ A(\beta)\widetilde{u} := -\mu^{-1}\left(\operatorname{div}\left(\varepsilon^{-1}\nabla\widetilde{u}\right) - \beta^2\varepsilon^{-1}\widetilde{u}\right) = \omega^2\widetilde{u} \end{array} \right.$$

$$D(A) := \{v \in H_0^1(\Omega) |\, \operatorname{div}(\varepsilon^{-1}\nabla v) \in L^2(\Omega)\}$$

But : caractériser le spectre de $A(\beta)$ et approcher ses valeurs propres.

Problème de valeurs propres



$$\begin{aligned} \mathrm{div}\left(\varepsilon^{-1}\nabla\widetilde{u}\right) - \beta^2\varepsilon^{-1}\widetilde{u} + \omega^2\mu\widetilde{u} = 0 \quad & \Omega \\ \widetilde{u} = 0 \quad & \partial\Omega \end{aligned}$$

$\boxed{\mu > 0}$

Deux façons d'étudier le problème:

-pour une fréquence ω, trouver $(\tilde{u}, \beta^2)$ tel que $A(\omega)\widetilde{u} = \beta^2\varepsilon^{-1}\widetilde{u}$

-pour un nombre d'onde β, trouver $(\tilde{u}, \omega^2)$ tel que $\boxed{A(\beta)\widetilde{u} = \omega^2\widetilde{u}}$

On étudie le problème de valeurs propres:

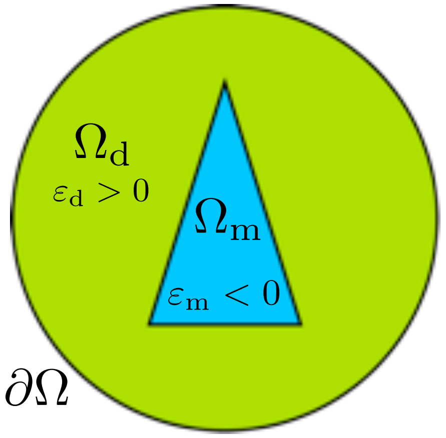
$$\left| \begin{array}{l} \text{Pour } \beta \in \mathbb{R}, \ \text{Trouver } (\widetilde{u}, \omega) \in D(A) \setminus \{0\} \times \mathbb{C} \text{ tels que :} \\ A(\beta)\widetilde{u} := -\mu^{-1}\left(\mathrm{div}\left(\varepsilon^{-1}\nabla\widetilde{u}\right) - \beta^2\varepsilon^{-1}\widetilde{u}\right) = \omega^2\widetilde{u} \end{array} \right.$$

$$D(A) := \{v \in H^1_0(\Omega) |\, \mathrm{div}(\varepsilon^{-1}\nabla v) \in L^2(\Omega)\}$$

But : caractériser le spectre de $A(\beta)$ et approcher ses valeurs propres.

Les propriétés idéales à montrer :

Problème de valeurs propres



$$\begin{aligned} \operatorname{div}\left(\varepsilon^{-1}\nabla\widetilde{u}\right) - \beta^2\varepsilon^{-1}\widetilde{u} + \omega^2\mu\widetilde{u} &= 0 \quad \Omega \\ \widetilde{u} &= 0 \quad \partial\Omega \end{aligned}$$

$$\boxed{\mu > 0}$$

Deux façons d'étudier le problème:

-pour une fréquence ω, trouver $(\tilde{u}, \beta^2)$ tel que $A(\omega)\widetilde{u} = \beta^2\varepsilon^{-1}\widetilde{u}$

-pour un nombre d'onde β, trouver $(\tilde{u}, \omega^2)$ tel que $\boxed{A(\beta)\widetilde{u} = \omega^2\widetilde{u}}$

On étudie le problème de valeurs propres:

$$\left| \begin{array}{l} \text{Pour } \beta \in \mathbb{R}, \text{ Trouver } (\widetilde{u}, \omega) \in D(A) \setminus \{0\} \times \mathbb{C} \text{ tels que :} \\ A(\beta)\widetilde{u} := -\mu^{-1}\left(\operatorname{div}\left(\varepsilon^{-1}\nabla\widetilde{u}\right) - \beta^2\varepsilon^{-1}\widetilde{u}\right) = \omega^2\widetilde{u} \end{array} \right.$$

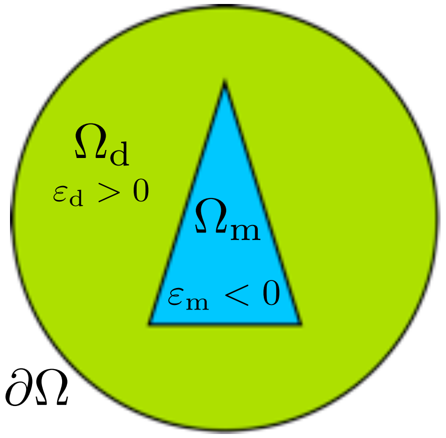
$$D(A) := \{v \in H_0^1(\Omega) |\, \operatorname{div}(\varepsilon^{-1}\nabla v) \in L^2(\Omega)\}$$

But : caractériser le spectre de $A(\beta)$ et approcher ses valeurs propres.

Les propriétés idéales à montrer : $A(\beta)$ est auto-adjoint et est à résolvante compacte

$\Longrightarrow$ Spectre réel discret tendant vers l' ∞

Problème de valeurs propres



$$\begin{aligned} \operatorname{div}\left(\varepsilon^{-1}\nabla\widetilde{u}\right) - \beta^2\varepsilon^{-1}\widetilde{u} + \omega^2\mu\widetilde{u} &= 0 \quad \Omega \\ \widetilde{u} &= 0 \quad \partial\Omega \end{aligned}$$

$\boxed{\mu > 0}$

Deux façons d'étudier le problème:

-pour une fréquence ω, trouver $(\tilde{u}, \beta^2)$ tel que $A(\omega)\widetilde{u} = \beta^2\varepsilon^{-1}\widetilde{u}$

-pour un nombre d'onde β, trouver $(\tilde{u}, \omega^2)$ tel que $\boxed{A(\beta)\widetilde{u} = \omega^2\widetilde{u}}$

On étudie le problème de valeurs propres:

$$\left| \begin{array}{l} \text{Pour } \beta \in \mathbb{R}, \ \text{Trouver } (\widetilde{u}, \omega) \in D(A) \setminus \{0\} \times \mathbb{C} \text{ tels que :} \\ A(\beta)\widetilde{u} := -\mu^{-1}\left(\operatorname{div}\left(\varepsilon^{-1}\nabla\widetilde{u}\right) - \beta^2\varepsilon^{-1}\widetilde{u}\right) = \omega^2\widetilde{u} \end{array} \right.$$

$$D(A) := \{v \in H_0^1(\Omega) |\, \operatorname{div}(\varepsilon^{-1}\nabla v) \in L^2(\Omega)\}$$

But : caractériser le spectre de $A(\beta)$ et approcher ses valeurs propres.

Les propriétés idéales à montrer : $A(\beta)$ est auto-adjoint et est à résolvante compacte

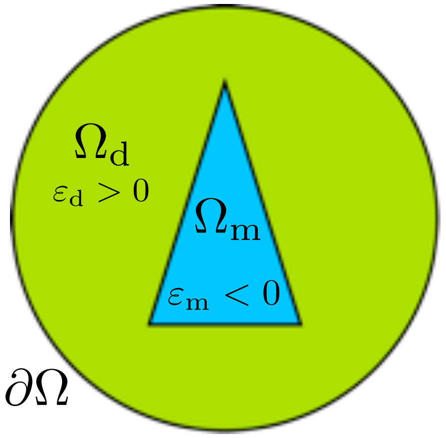
$\Longrightarrow$ Spectre réel discret tendant vers l' ∞

Deux cas à distinguer selon le contraste.

Sommaire

- Partie II : le guide d'ondes plasmonique scalaire
  - **Étude hors intervalle critique**
  - Étude dans l'intervalle critique

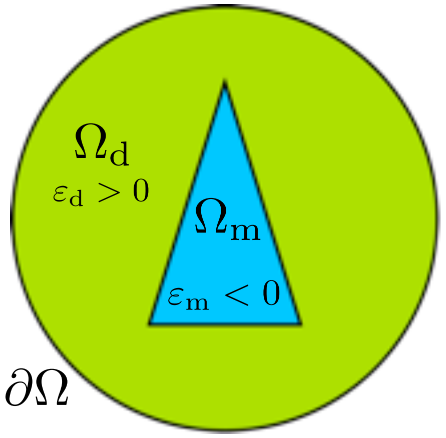
Étude hors intervalle critique $\kappa_\varepsilon \notin I_c$



Pour $\beta \in \mathbb{R}$, Trouver $(\widetilde{u}, \omega) \in D(A) \setminus \{0\} \times \mathbb{C}$ tels que :

$A(\beta)\widetilde{u} = \omega^2 \widetilde{u}$

Étude hors intervalle critique $\kappa_\varepsilon \notin I_c$



Pour $\beta \in \mathbb{R}$, Trouver $(\widetilde{u}, \omega) \in D(A) \setminus \{0\} \times \mathbb{C}$ tels que :

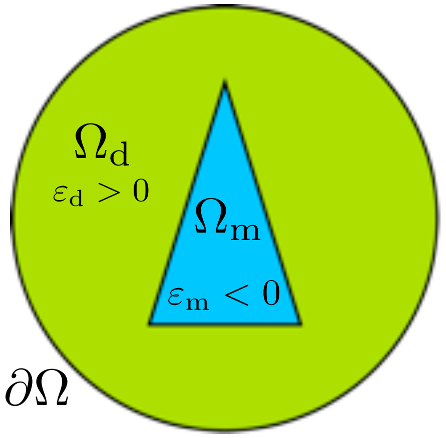
$$A(\beta)\widetilde{u} = \omega^2 \widetilde{u}$$

$$\Updownarrow$$

Pour $\beta \in \mathbb{R}$, Trouver $(\widetilde{u}, \omega) \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\} \times \mathbb{C}$ tels que :

$$\int_\Omega \varepsilon^{-1} \nabla \tilde{u} \cdot \overline{\nabla v} + \beta^2 \int_\Omega \varepsilon^{-1}\, \tilde{u}\overline{v} = \omega^2 \int_\Omega \mu\, \tilde{u}\overline{v}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Étude hors intervalle critique $\kappa_\varepsilon \notin I_c$



Pour $\beta \in \mathbb{R}$, Trouver $(\widetilde{u}, \omega) \in D(A) \setminus \{0\} \times \mathbb{C}$ tels que :

$$A(\beta)\widetilde{u} = \omega^2 \widetilde{u}$$

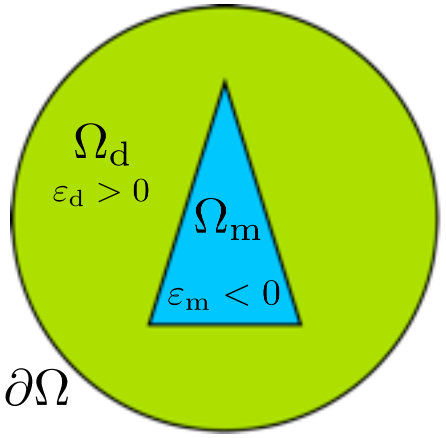
$$\Updownarrow$$

Pour $\beta \in \mathbb{R}$, Trouver $(\widetilde{u}, \omega) \in H^1_0(\Omega) \setminus \{0\} \times \mathbb{C}$ tels que :

$$\int_\Omega \varepsilon^{-1} \nabla \tilde{u} \cdot \overline{\nabla v} + \beta^2 \int_\Omega \varepsilon^{-1}\, \tilde{u}\overline{v} = \omega^2 \int_\Omega \mu\, \tilde{u}\overline{v}, \quad \forall v \in H^1_0(\Omega)$$

Avec la T-coercivité on montre que $A(\beta)$ est auto-adjoint et à résolvante compacte.

Étude hors intervalle critique $\kappa_\varepsilon \notin I_c$



Pour $\beta \in \mathbb{R}$, Trouver $(\widetilde{u}, \omega) \in D(A) \setminus \{0\} \times \mathbb{C}$ tels que :

$$A(\beta)\widetilde{u} = \omega^2 \widetilde{u}$$

$$\Updownarrow$$

Pour $\beta \in \mathbb{R}$, Trouver $(\widetilde{u}, \omega) \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\} \times \mathbb{C}$ tels que :

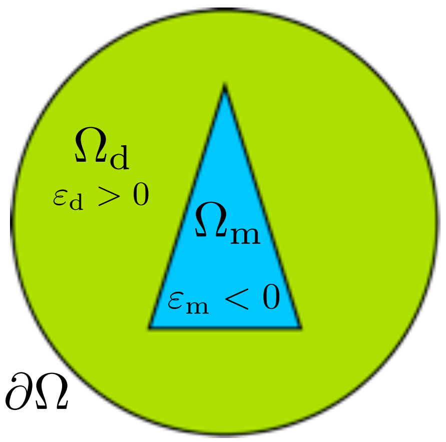
$$\int_\Omega \varepsilon^{-1} \nabla \tilde{u} \cdot \overline{\nabla v} + \beta^2 \int_\Omega \varepsilon^{-1}\, \tilde{u}\overline{v} = \omega^2 \int_\Omega \mu\, \tilde{u}\overline{v}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Avec la T-coercivité on montre que $A(\beta)$ est auto-adjoint et à résolvante compacte.

Spectre réel discret tendant vers $+\infty$ et $-\infty$.

Ramdani (1999).

Étude hors intervalle critique $\kappa_\varepsilon \notin I_c$



$$\left|\begin{array}{l}\text{Pour } \beta \in \mathbb{R}, \text{ Trouver } (\tilde{u}, \omega) \in D(A) \setminus \{0\} \times \mathbb{C} \text{ tels que :} \\ A(\beta)\tilde{u} = \omega^2 \tilde{u}\end{array}\right.$$

$$\Updownarrow$$

$$\left|\begin{array}{l}\text{Pour } \beta \in \mathbb{R}, \text{ Trouver } (\tilde{u}, \omega) \in H^1_0(\Omega) \setminus \{0\} \times \mathbb{C} \text{ tels que :} \\ \displaystyle\int_\Omega \varepsilon^{-1} \nabla\tilde{u} \cdot \overline{\nabla v} + \beta^2 \int_\Omega \varepsilon^{-1}\, \tilde{u}\overline{v} = \omega^2 \int_\Omega \mu\, \tilde{u}\overline{v}, \quad \forall v \in H^1_0(\Omega)\end{array}\right.$$

Avec la T-coercivité on montre que $A(\beta)$ est auto-adjoint et à résolvante compacte.

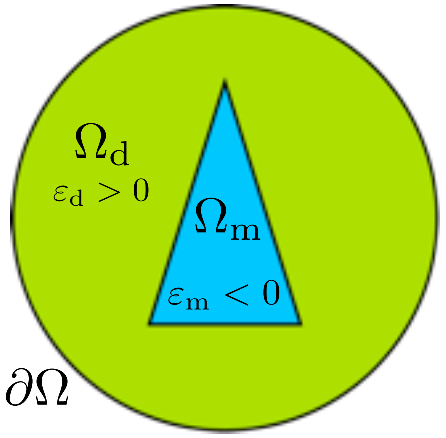
Spectre réel discret tendant vers $+\infty$ et $-\infty$.

Ramdani (1999).

Particularité : le spectre possède deux «points» d'accumulation, certaines méthodes numériques peuvent produire des valeurs propres parasites.

Séré et Lewin (2010).

Étude hors intervalle critique $\kappa_\varepsilon \notin I_c$



Pour $\beta \in \mathbb{R}$, Trouver $(\tilde{u}, \omega) \in D(A) \setminus \{0\} \times \mathbb{C}$ tels que :

$$A(\beta)\tilde{u} = \omega^2 \tilde{u}$$

$$\Updownarrow$$

Pour $\beta \in \mathbb{R}$, Trouver $(\tilde{u}, \omega) \in H^1_0(\Omega) \setminus \{0\} \times \mathbb{C}$ tels que :

$$\int_\Omega \varepsilon^{-1} \nabla \tilde{u} \cdot \overline{\nabla v} + \beta^2 \int_\Omega \varepsilon^{-1}\, \tilde{u}\overline{v} = \omega^2 \int_\Omega \mu\, \tilde{u}\overline{v}, \quad \forall v \in H^1_0(\Omega)$$

Avec la T-coercivité on montre que $A(\beta)$ est auto-adjoint et à résolvante compacte.

Spectre réel discret tendant vers $+\infty$ et $-\infty$.

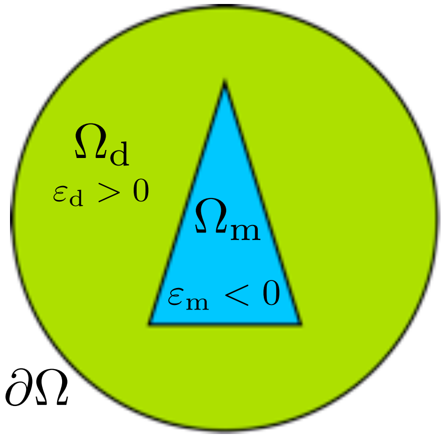
Ramdani (1999).

Particularité : le spectre possède deux «points» d'accumulation, certaines méthodes numériques peuvent produire des valeurs propres parasites.

Séré et Lewin (2010).

Peut-on assurer la convergence des méthodes éléments finis sans pollution spectrale ?

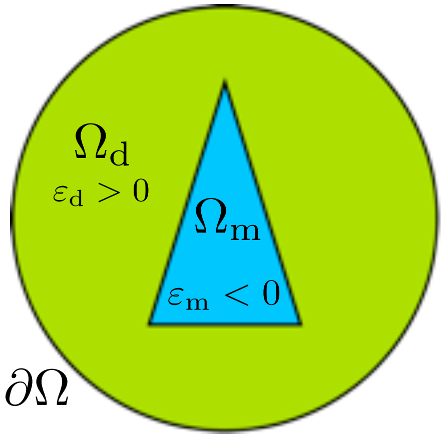
Approximation des valeurs propres



Pour $\beta \in \mathbb{R}$, Trouver $(\widetilde{u}, \omega) \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\} \times \mathbb{C}$ tels que :

$$\int_\Omega \varepsilon^{-1} \nabla u \cdot \overline{\nabla v} + \beta^2 \int_\Omega \varepsilon^{-1}\, u \overline{v} = \omega^2 \int_\Omega \mu\, u\overline{v}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Approximation des valeurs propres



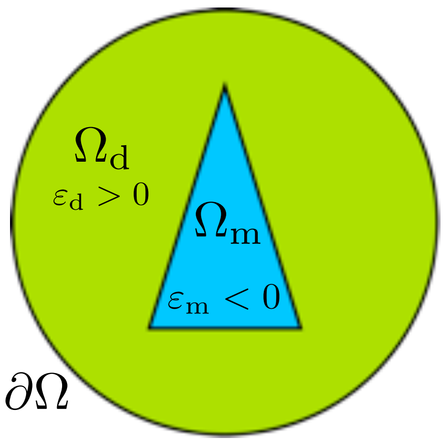
Pour $\beta \in \mathbb{R}$, Trouver $(\widetilde{u}, \omega) \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\} \times \mathbb{C}$ tels que :

$$\int_\Omega \varepsilon^{-1} \nabla u \cdot \overline{\nabla v} + \beta^2 \int_\Omega \varepsilon^{-1} u\overline{v} = \omega^2 \int_\Omega \mu \, u\overline{v}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Idée pour éviter la pollution spectrale :
approcher les valeurs propres d'un opérateur compact.

Osborn (1975).

Approximation des valeurs propres



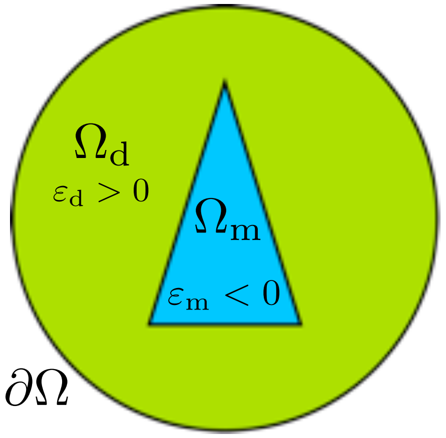
Pour $\beta \in \mathbb{R}$, Trouver $(\widetilde{u}, \omega) \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\} \times \mathbb{C}$ tels que :

$$\int_\Omega \varepsilon^{-1} \nabla u \cdot \overline{\nabla v} + \beta^2 \int_\Omega \varepsilon^{-1} u \overline{v} = \omega^2 \int_\Omega \mu\, u \overline{v}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Idée pour éviter la pollution spectrale :
approcher les valeurs propres d'un opérateur compact. Osborn (1975).

Théorème. Soit un opérateur compact B, et $(B_h)_h$ une suite d'opérateurs discrets tels que $\|B_h - B\| \underset{h\to 0}{\to} 0$, alors les valeurs propres sont approchées sans valeurs propres parasites.

Approximation des valeurs propres



Pour $\beta \in \mathbb{R}$, Trouver $(\widetilde{u}, \omega) \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\} \times \mathbb{C}$ tels que :

$$\int_\Omega \varepsilon^{-1} \nabla u \cdot \overline{\nabla v} + \beta^2 \int_\Omega \varepsilon^{-1}\, u\overline{v} = \omega^2 \int_\Omega \mu\, u\overline{v}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Idée pour éviter la pollution spectrale :
approcher les valeurs propres d'un opérateur compact.

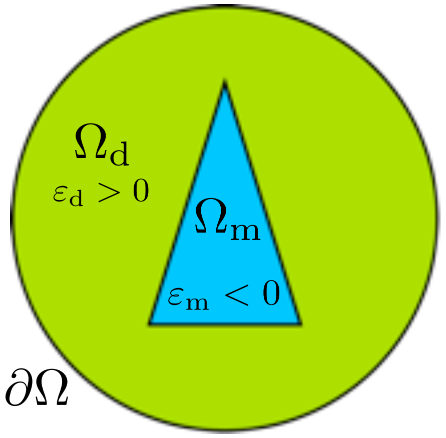
Osborn (1975).

Théorème. Soit un opérateur compact B, et $(B_h)_h$ une suite d'opérateurs discrets tels que $\|B_h - B\| \underset{h\to 0}{\to} 0$, alors les valeurs propres sont approchées sans valeurs propres parasites.

Comme $A(\beta)$ est auto-adjoint et à résolvante compacte on considère :

$$\boxed{B := (A(\beta) - tI_{L^2})^{-1}, \quad t \in \mathbb{R} \setminus \sigma(A(\beta)) \ \text{ et } \ B_h := (A_h(\beta) - tI_h)^{-1}}$$

Approximation des valeurs propres



Pour $\beta \in \mathbb{R}$, Trouver $(\widetilde{u}, \omega) \in H^1_0(\Omega) \setminus \{0\} \times \mathbb{C}$ tels que :

$$\int_\Omega \varepsilon^{-1} \nabla u \cdot \overline{\nabla v} + \beta^2 \int_\Omega \varepsilon^{-1}\, u\overline{v} = \omega^2 \int_\Omega \mu\, u\overline{v}, \quad \forall v \in H^1_0(\Omega)$$

Idée pour éviter la pollution spectrale :
approcher les valeurs propres d'un opérateur compact.

Osborn (1975).

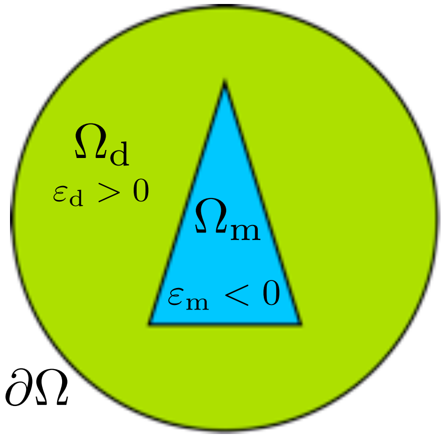
Théorème. Soit un opérateur compact B, et $(B_h)_h$ une suite d'opérateurs discrets tels que $\|B_h - B\| \underset{h\to 0}{\to} 0$, alors les valeurs propres sont approchées sans valeurs propres parasites.

Comme $A(\beta)$ est auto-adjoint et à résolvante compacte on considère :

$$\boxed{B := (A(\beta) - tI_{L^2})^{-1}, \quad t \in \mathbb{R} \setminus \sigma(A(\beta)) \text{ et } B_h := (A_h(\beta) - tI_h)^{-1}}$$

On obtient la convergence $\|B_h - B\| \underset{h\to 0}{\to} 0$ en utilisant les résultats d'approximation pour les problèmes de transmission avec second membre :

Approximation des valeurs propres



Pour $\beta \in \mathbb{R}$, Trouver $(\widetilde{u}, \omega) \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\} \times \mathbb{C}$ tels que :

$$\int_\Omega \varepsilon^{-1} \nabla u \cdot \overline{\nabla v} + \beta^2 \int_\Omega \varepsilon^{-1} u\overline{v} = \omega^2 \int_\Omega \mu\, u\overline{v}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Idée pour éviter la pollution spectrale :
approcher les valeurs propres d'un opérateur compact. Osborn (1975).

Théorème. Soit un opérateur compact B, et $(B_h)_h$ une suite d'opérateurs discrets tels que $\|B_h - B\| \underset{h\to 0}{\to} 0$, alors les valeurs propres sont approchées sans valeurs propres parasites.

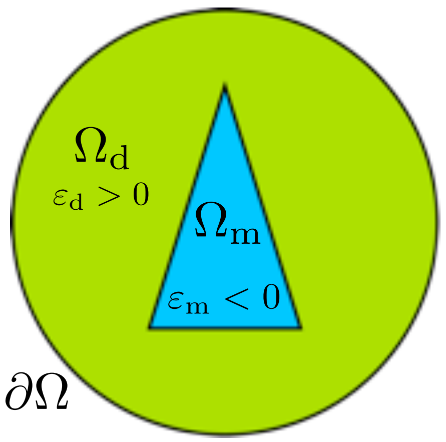
Comme $A(\beta)$ est auto-adjoint et à résolvante compacte on considère :

$$\boxed{B := (A(\beta) - tI_{L^2})^{-1}, \quad t \in \mathbb{R} \setminus \sigma(A(\beta)) \ \text{ et } \ B_h := (A_h(\beta) - tI_h)^{-1}}$$

On obtient la convergence $\|B_h - B\| \underset{h\to 0}{\to} 0$ en utilisant les résultats d'approximation pour les problèmes de transmission avec second membre :

$$\boxed{\text{Si } \mathtt{T}(V^h) \subset V^h \text{ alors } \|u - u_h\|_V \leqslant Ch^s \|f\|}$$

Approximation des valeurs propres



Pour $\beta \in \mathbb{R}$, Trouver $(\widetilde{u}, \omega) \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\} \times \mathbb{C}$ tels que :

$$\int_\Omega \varepsilon^{-1} \nabla u \cdot \overline{\nabla v} + \beta^2 \int_\Omega \varepsilon^{-1} u \overline{v} = \omega^2 \int_\Omega \mu\, u \overline{v}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Idée pour éviter la pollution spectrale :
approcher les valeurs propres d'un opérateur compact. Osborn (1975).

Théorème. Soit un opérateur compact B, et $(B_h)_h$ une suite d'opérateurs discrets tels que $\|B_h - B\| \underset{h \to 0}{\to} 0$, alors les valeurs propres sont approchées sans valeurs propres parasites.

Comme $A(\beta)$ est auto-adjoint et à résolvante compacte on considère :

$$\boxed{B := (A(\beta) - tI_{L^2})^{-1}, \quad t \in \mathbb{R} \setminus \sigma(A(\beta)) \;\text{ et }\; B_h := (A_h(\beta) - tI_h)^{-1}}$$

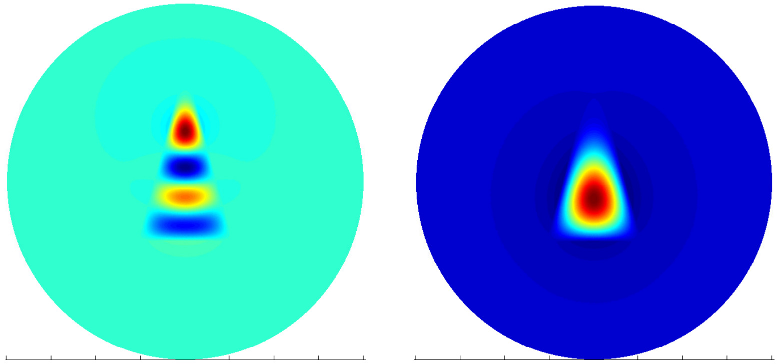
On obtient la convergence $\|B_h - B\| \underset{h \to 0}{\to} 0$ en utilisant les résultats d'approximation pour les problèmes de transmission avec second membre :

$$\boxed{\text{Si } \mathtt{T}(V^h) \subset V^h \text{ alors } \|u - u_h\|_V \leqslant C h^s \|f\|}$$

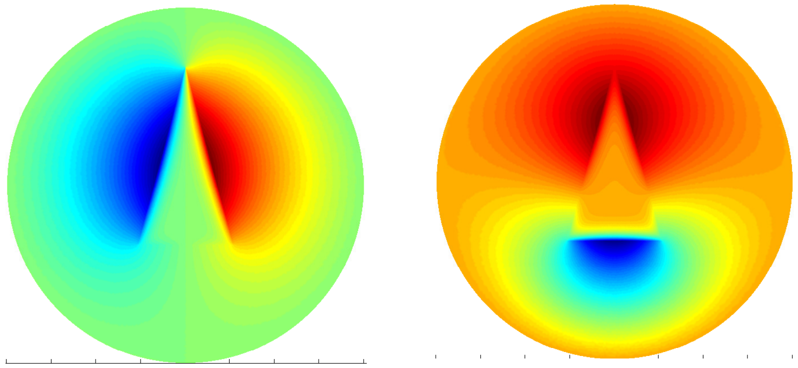
Théorème. Si $\mathtt{T}(V^h) \subset V^h$ alors on approche les valeurs propres de $A(\beta)$ sans valeurs propres parasites.

Résultats numériques pour $\kappa_\varepsilon \notin I_c$

Résultats numériques pour $\kappa_\varepsilon \notin I_c$

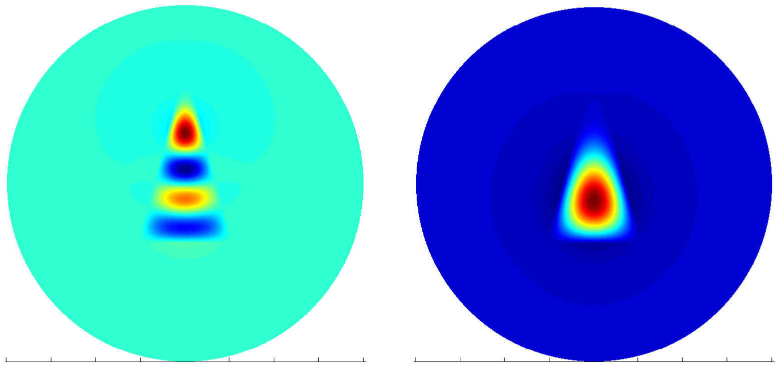


Valeurs propres négatives

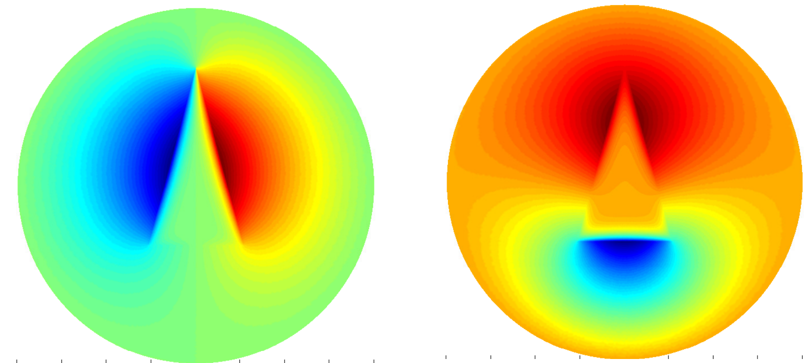


Valeurs propres positives

Résultats numériques pour $\kappa_\varepsilon \notin I_c$



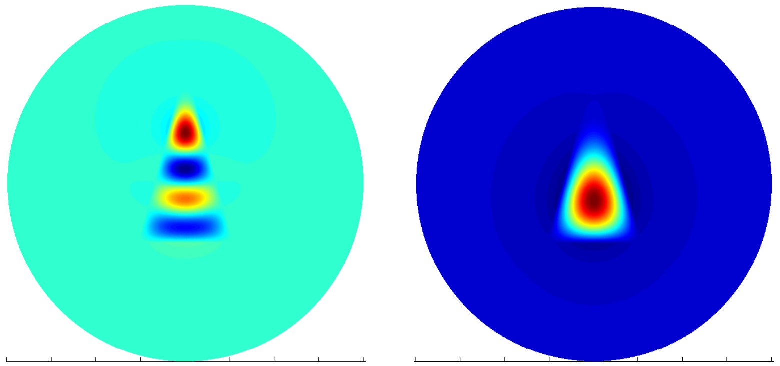
Valeurs propres négatives



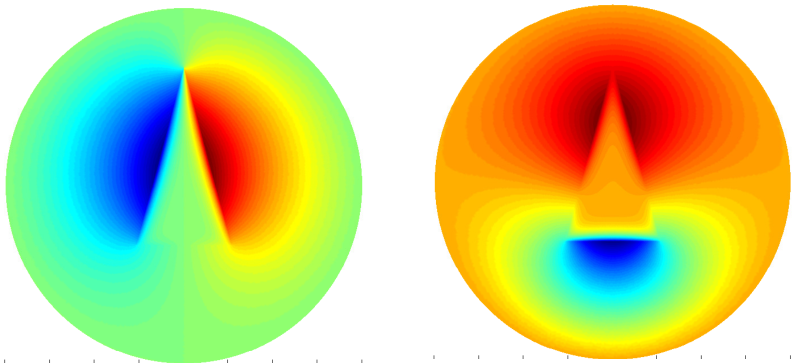
Valeurs propres positives

Les modes sont essentiellement confinés dans le métal ou le diélectrique.

Résultats numériques pour $\kappa_\varepsilon \notin I_c$

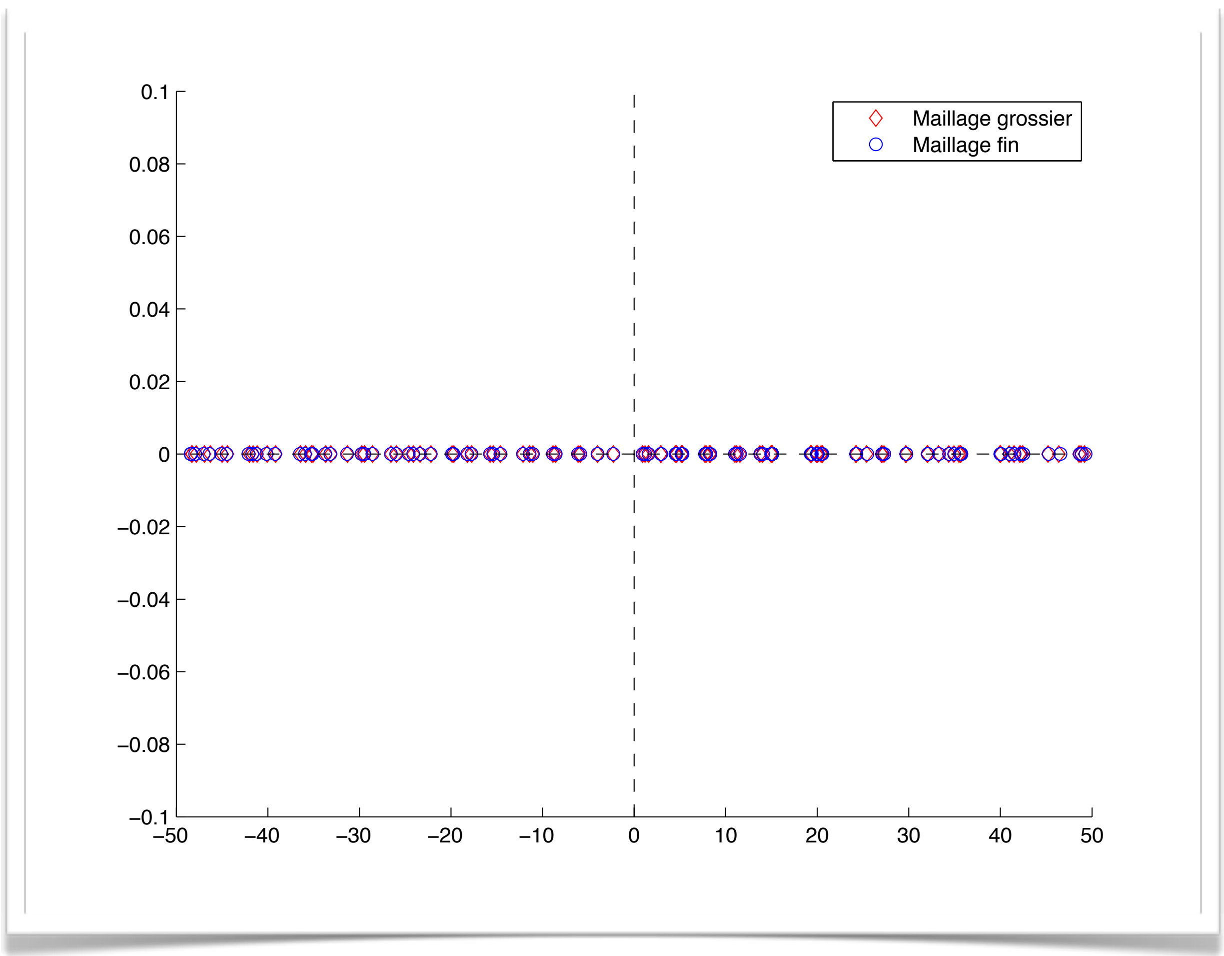


Valeurs propres négatives



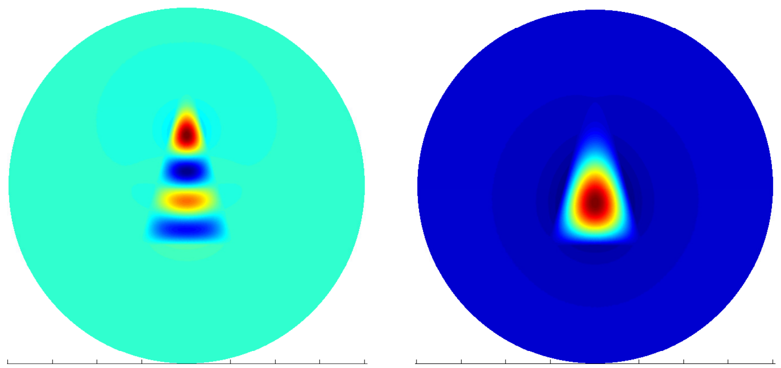
Valeurs propres positives

Les modes sont essentiellement confinés dans le métal ou le diélectrique.

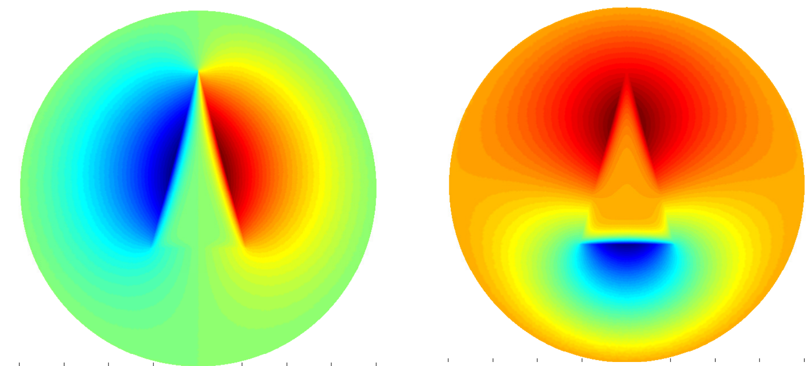


Résultats obtenus avec des maillages localement T-conformes.

Résultats numériques pour $\kappa_\varepsilon \notin I_c$

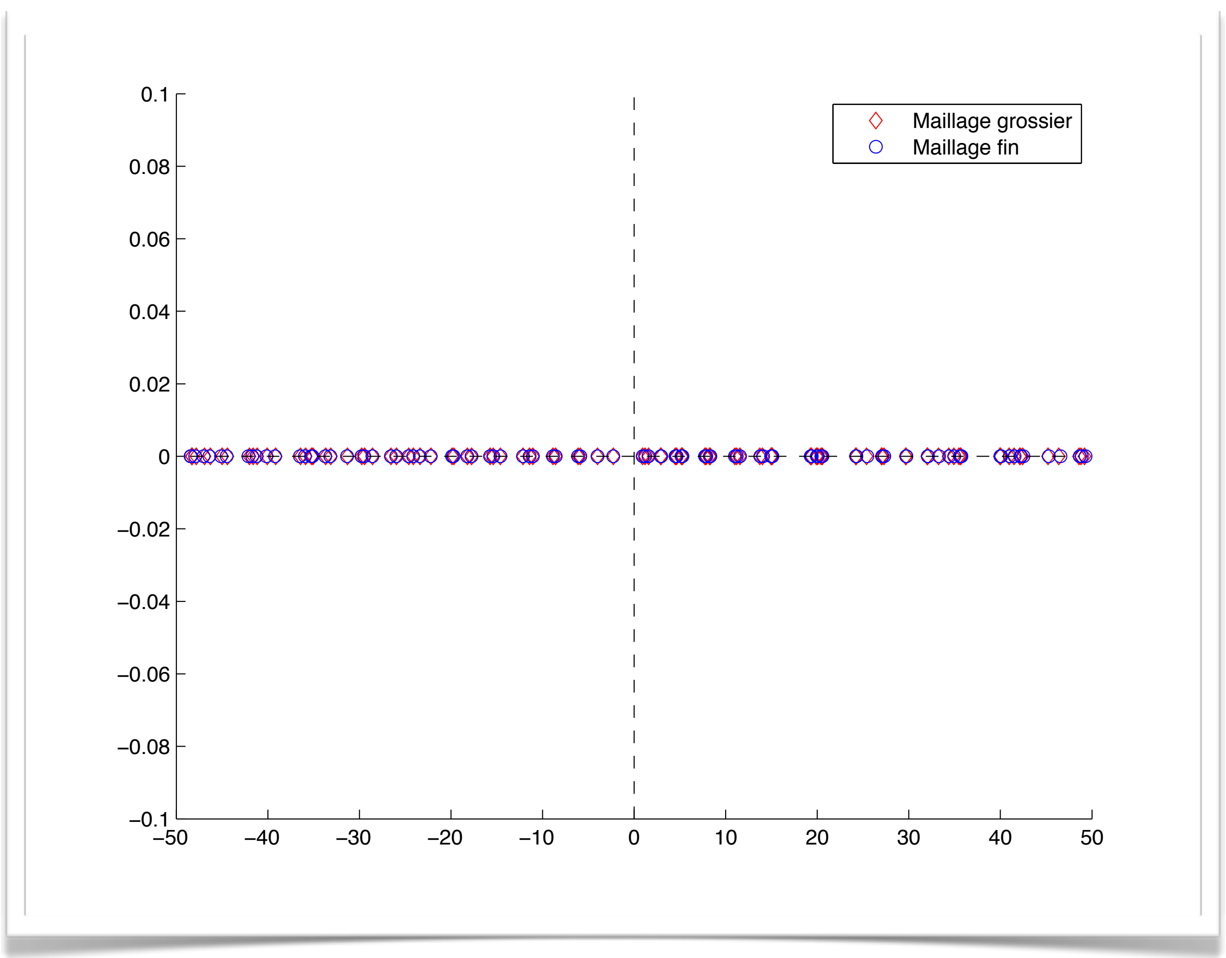


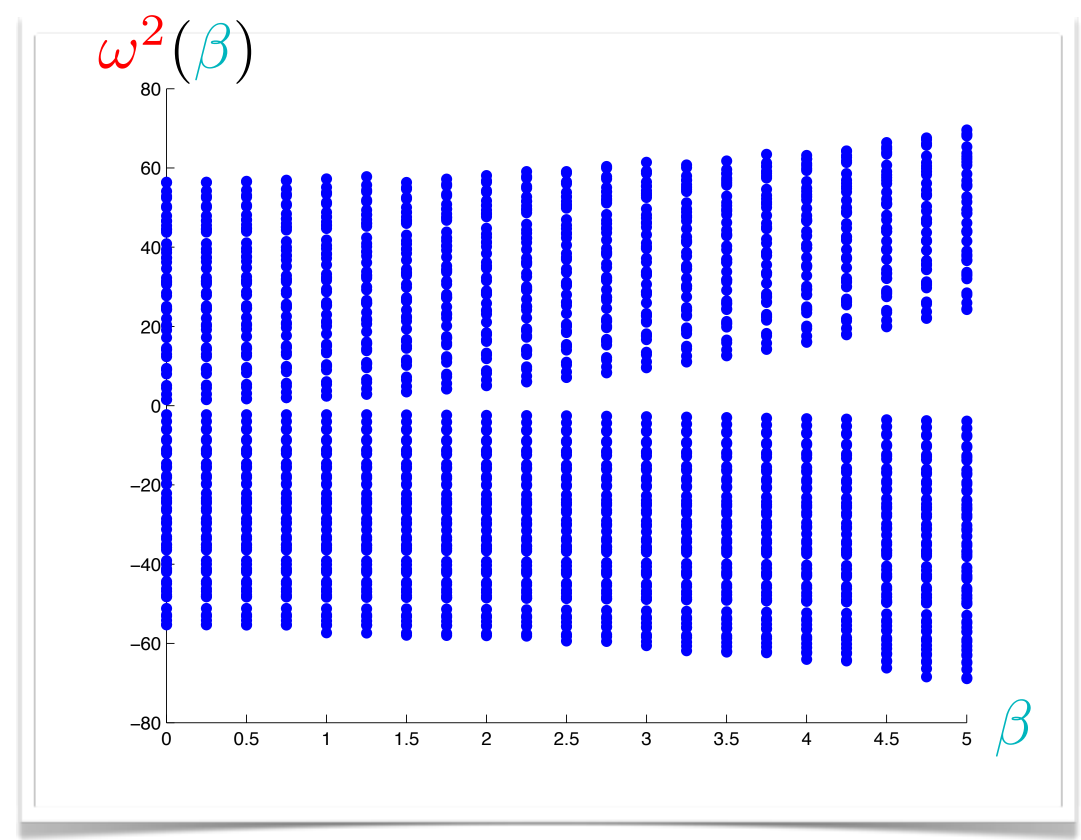
Valeurs propres négatives



Valeurs propres positives

Les modes sont essentiellement confinés dans le métal ou le diélectrique.



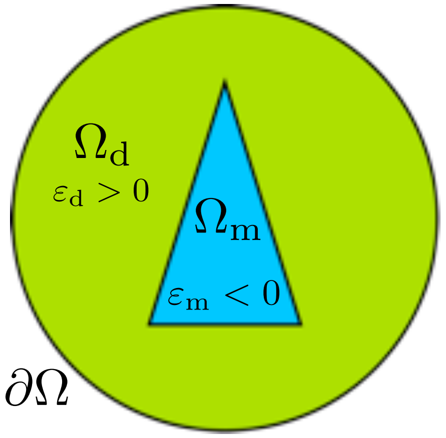


Résultats obtenus avec des maillages localement T-conformes.

Sommaire

- Partie II : le guide d’ondes plasmonique scalaire
  - Étude hors intervalle critique
  - **Étude dans l’intervalle critique**

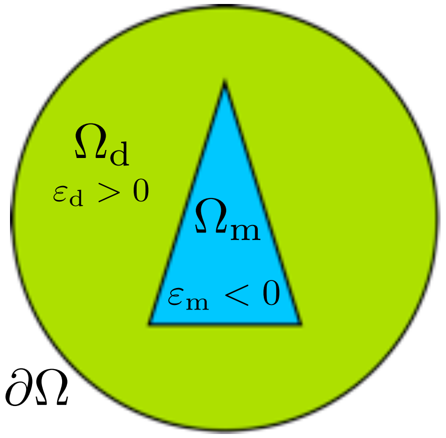
Étude dans l'intervalle critique $\kappa_\varepsilon \in I_c$



Pour $\beta \in \mathbb{R}$, Trouver $(\widetilde{u}, \omega) \in H^1_0(\Omega) \setminus \{0\} \times \mathbb{C}$ tels que :

$$\int_\Omega \varepsilon^{-1} \nabla \tilde{u} \cdot \overline{\nabla v} + \beta^2 \int_\Omega \varepsilon^{-1}\, \tilde{u}\overline{v} = \omega^2 \int_\Omega \mu\, \tilde{u}\overline{v}, \quad \forall v \in H^1_0(\Omega)$$

Étude dans l'intervalle critique $\kappa_\varepsilon \in I_c$

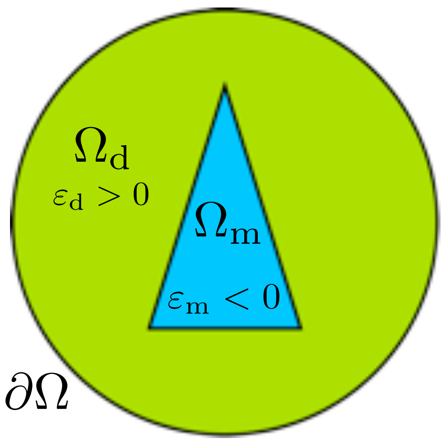


Pour $\beta \in \mathbb{R}$, Trouver $(\tilde{u}, \omega) \in H^1_0(\Omega) \setminus \{0\} \times \mathbb{C}$ tels que :

$$\int_\Omega \varepsilon^{-1} \nabla \tilde{u} \cdot \overline{\nabla v} + \beta^2 \int_\Omega \varepsilon^{-1}\, \tilde{u}\overline{v} = \omega^2 \int_\Omega \mu\, \tilde{u}\overline{v}, \quad \forall v \in H^1_0(\Omega)$$

Plus de T-coercivité ! Peut-on approcher les modes avec des méthodes éléments finis ?

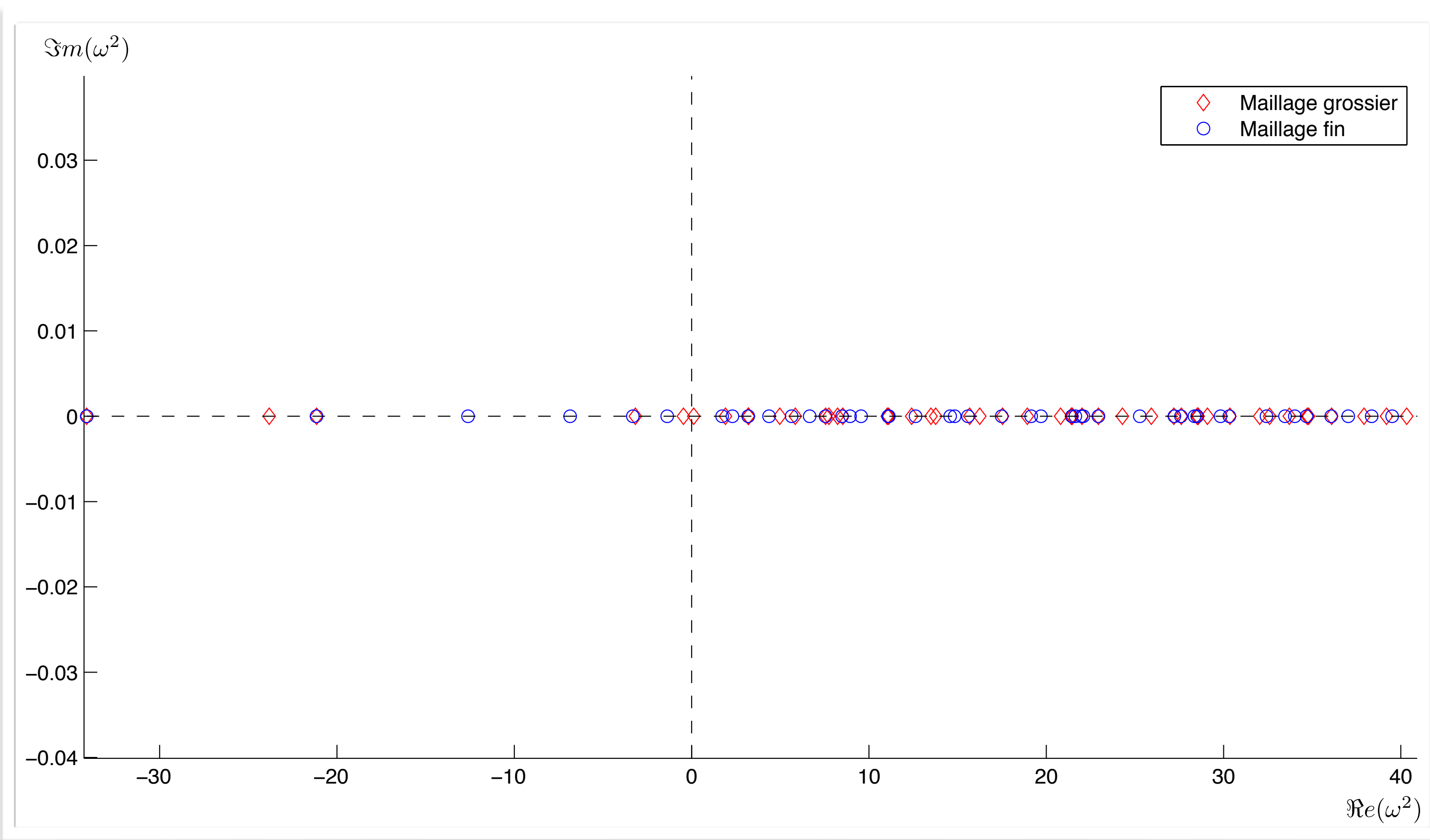
Étude dans l'intervalle critique $\kappa_\varepsilon \in I_c$



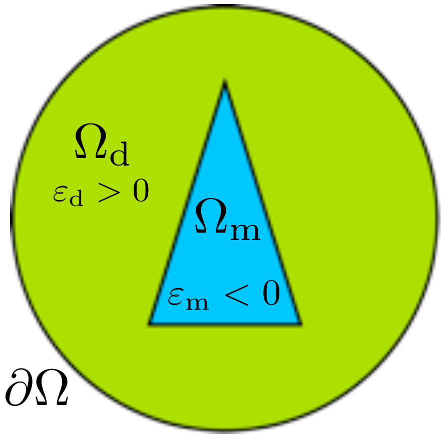
Pour $\beta \in \mathbb{R}$, Trouver $(\tilde{u}, \omega) \in H^1_0(\Omega) \setminus \{0\} \times \mathbb{C}$ tels que :

$$\int_\Omega \varepsilon^{-1} \nabla \tilde{u} \cdot \overline{\nabla v} + \beta^2 \int_\Omega \varepsilon^{-1}\, \tilde{u}\overline{v} = \omega^2 \int_\Omega \mu\, \tilde{u}\overline{v}, \quad \forall v \in H^1_0(\Omega)$$

Plus de T-coercivité ! Peut-on approcher les modes avec des méthodes éléments finis ?



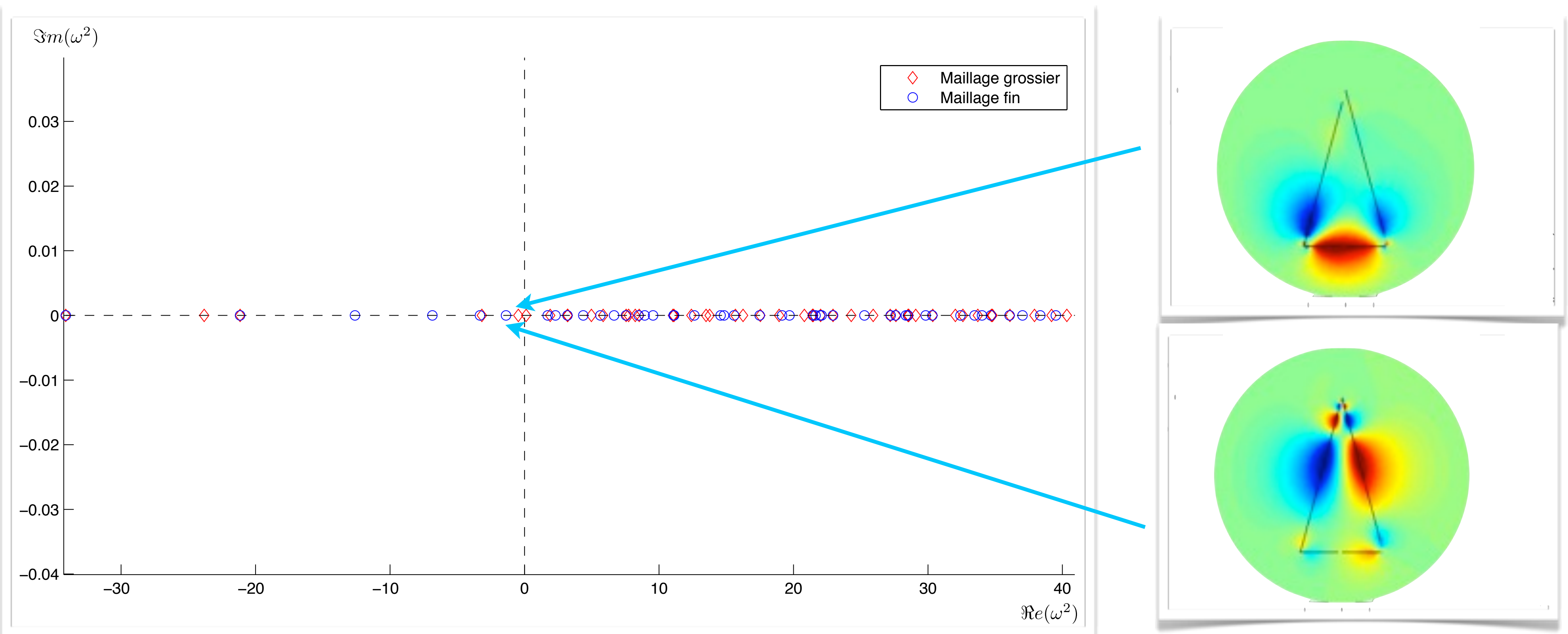
Étude dans l'intervalle critique $\kappa_\varepsilon \in I_c$



Pour $\beta \in \mathbb{R}$, Trouver $(\tilde{u}, \omega) \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\} \times \mathbb{C}$ tels que :

$$\int_\Omega \varepsilon^{-1} \nabla \tilde{u} \cdot \overline{\nabla v} + \beta^2 \int_\Omega \varepsilon^{-1}\, \tilde{u}\overline{v} = \omega^2 \int_\Omega \mu\, \tilde{u}\overline{v}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

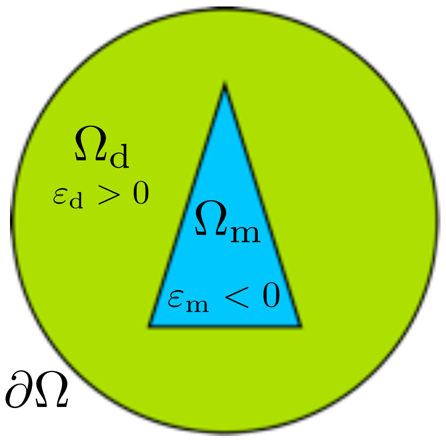
Plus de T-coercivité ! Peut-on approcher les modes avec des méthodes éléments finis ?



Maillage grossier

Maillage fin

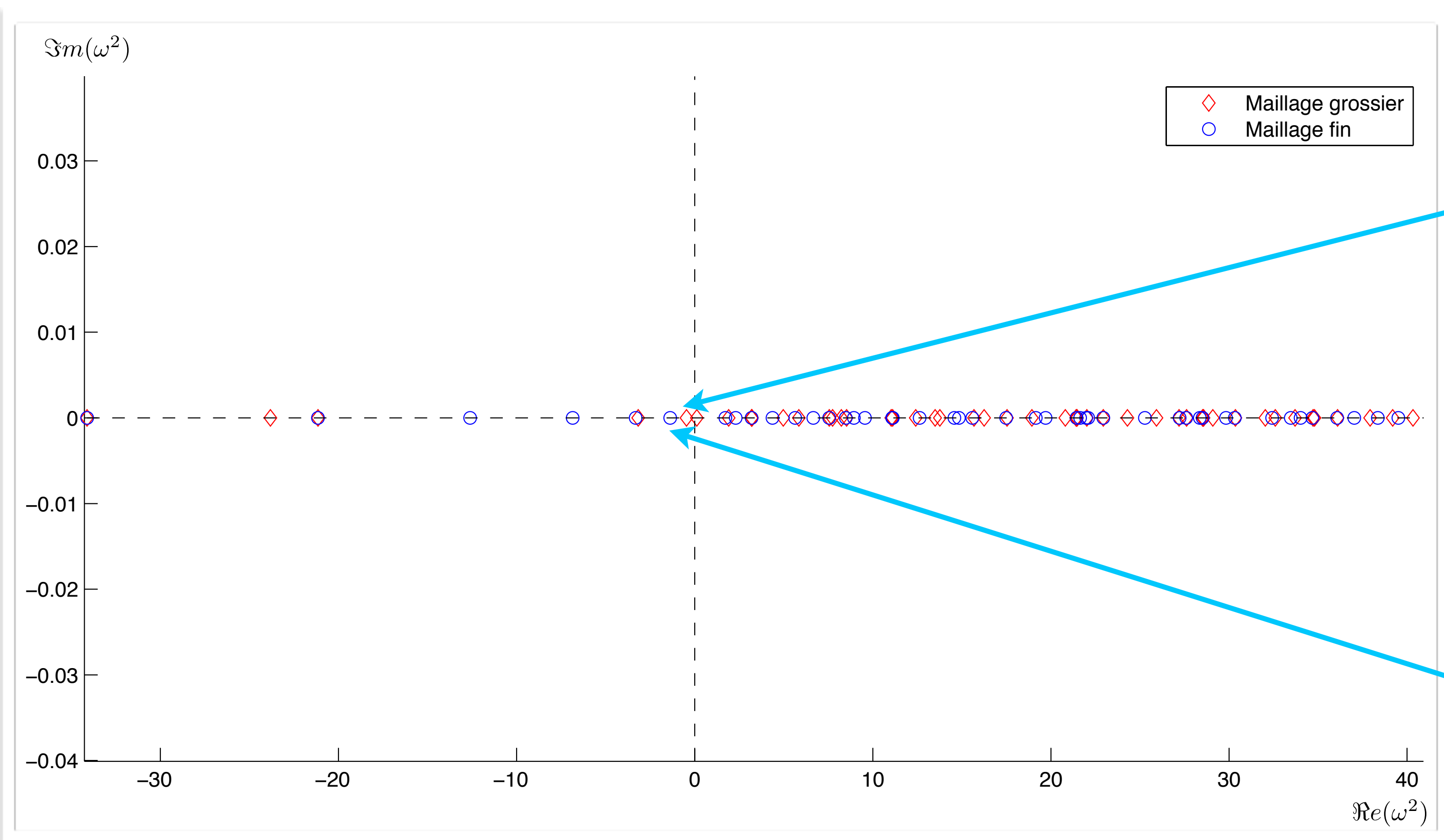
Étude dans l'intervalle critique $\kappa_\varepsilon \in I_c$

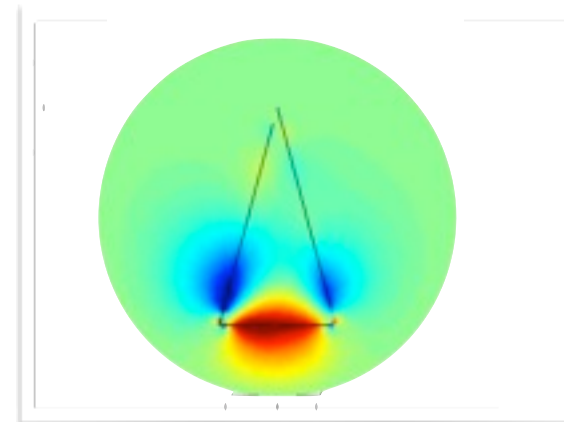


Pour $\beta \in \mathbb{R}$, Trouver $(\tilde{u}, \omega) \in H^1_0(\Omega) \setminus \{0\} \times \mathbb{C}$ tels que :

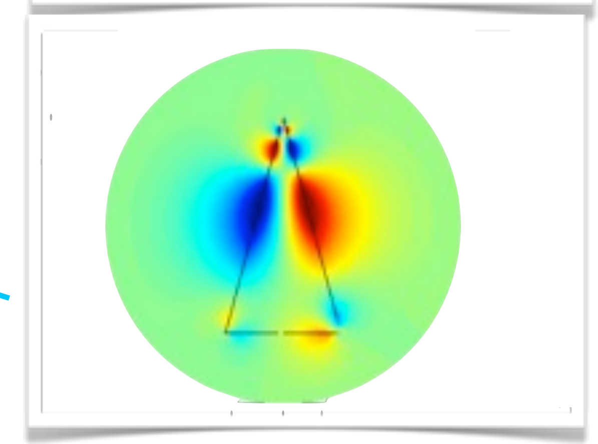
$$\int_\Omega \varepsilon^{-1} \nabla \tilde{u} \cdot \overline{\nabla v} + \beta^2 \int_\Omega \varepsilon^{-1}\, \tilde{u}\overline{v} = \omega^2 \int_\Omega \mu\, \tilde{u}\overline{v}, \quad \forall v \in H^1_0(\Omega)$$

Plus de T-coercivité ! Peut-on approcher les modes avec des méthodes éléments finis ?





Maillage grossier

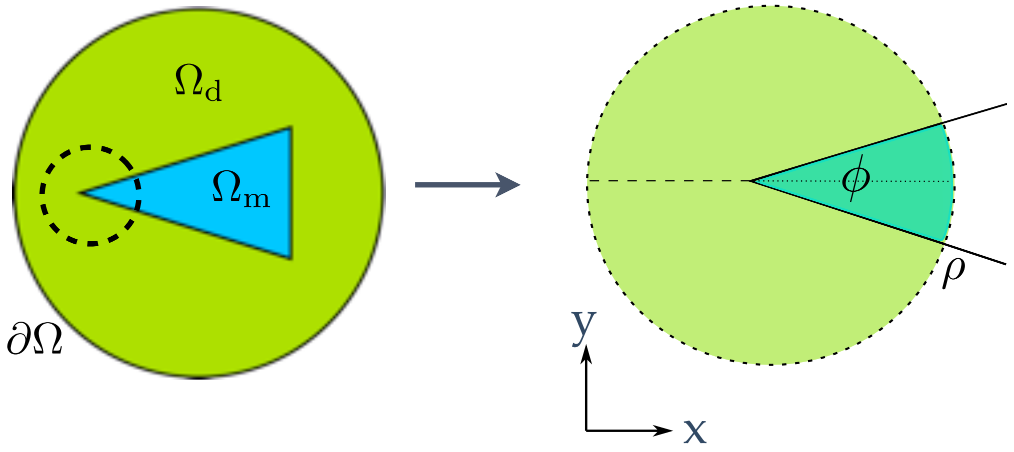


Maillage fin

Pas de convergence et comportement très oscillant aux coins.

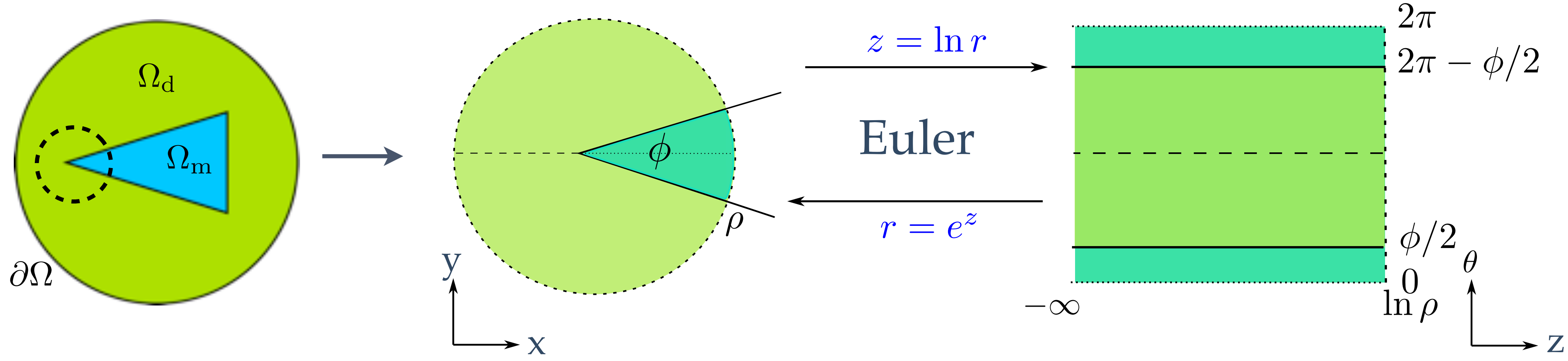
Analyse des singularités de coins

Pour simplifier, on considère ce qu'il se passe pour un seul coin.



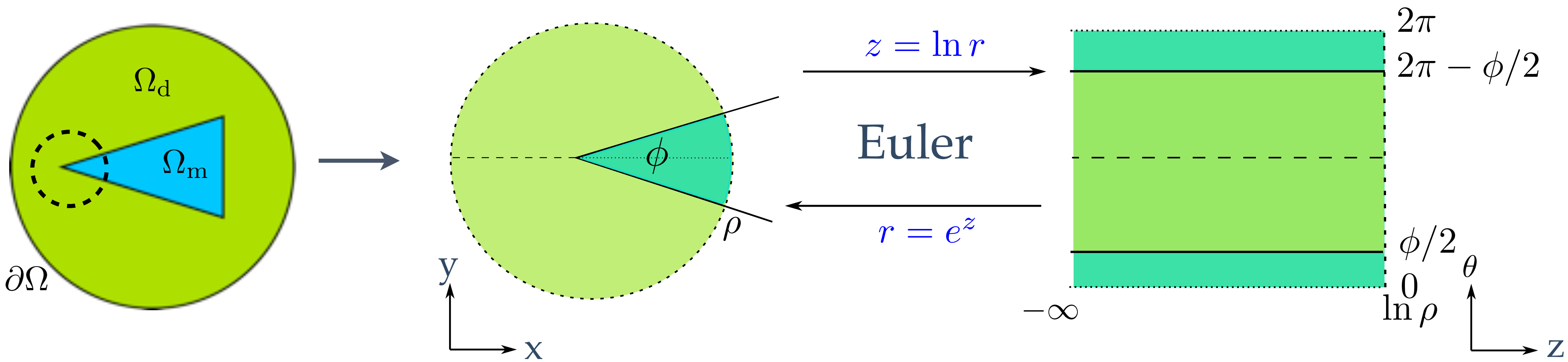
Analyse des singularités de coins

Pour simplifier, on considère ce qu'il se passe pour un seul coin.



Analyse des singularités de coins

Pour simplifier, on considère ce qu'il se passe pour un seul coin.

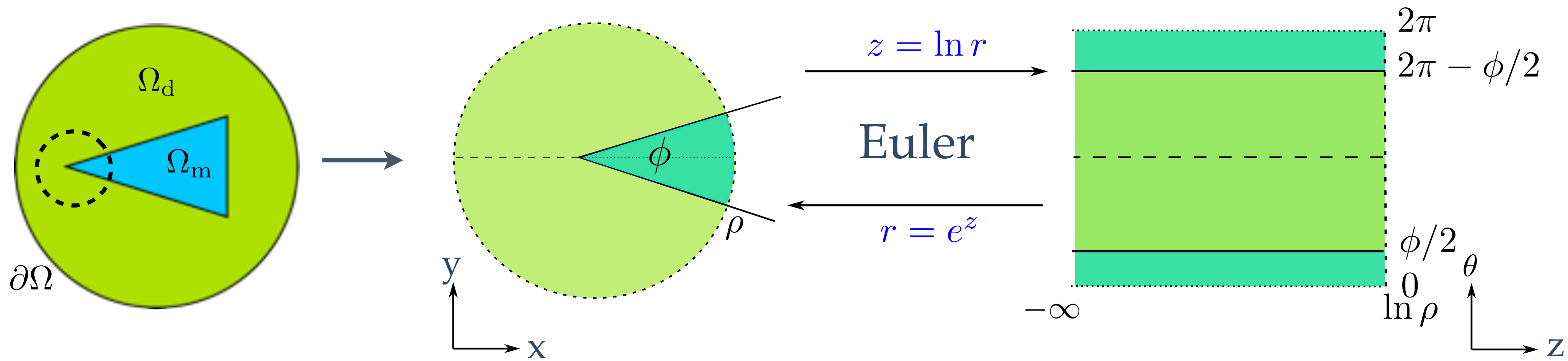


Comportement limite au coin

Comportement à l'infini dans le guide

Analyse des singularités de coins

Pour simplifier, on considère ce qu'il se passe pour un seul coin.



Comportement limite au coin

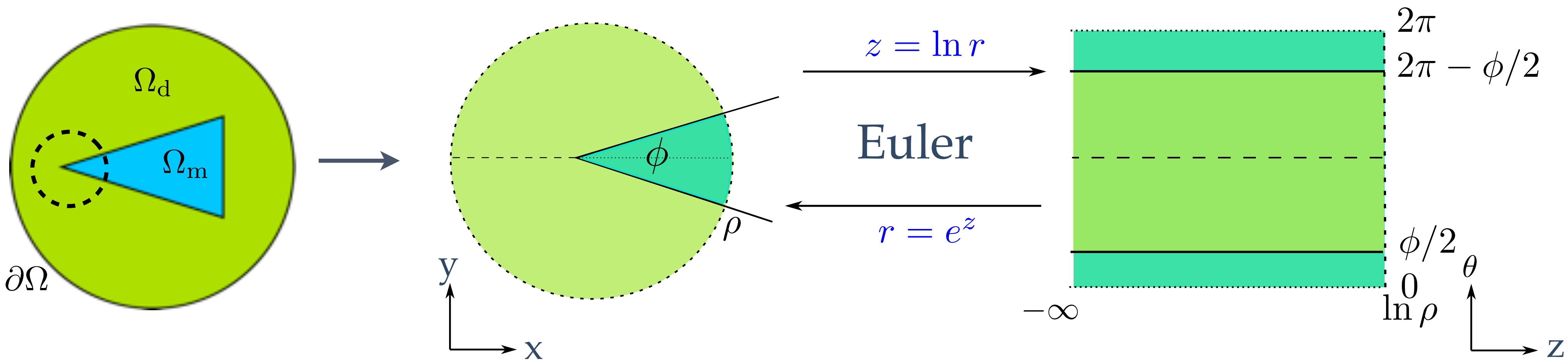
$$-\varepsilon^{-1} r\partial_r(r\partial_r u) - \partial_\theta\left(\varepsilon^{-1}\partial_\theta u\right) + \beta^2\varepsilon^{-1} r^2 u = \omega^2 \mu r^2 u$$

Comportement à l'infini dans le guide

$$-\mathrm{div}\left(\varepsilon^{-1}\nabla u\right) + \beta^2\varepsilon^{-1} e^{2z} u = \omega^2 \mu e^{2z} u$$

Analyse des singularités de coins

Pour simplifier, on considère ce qu'il se passe pour un seul coin.



Comportement limite au coin

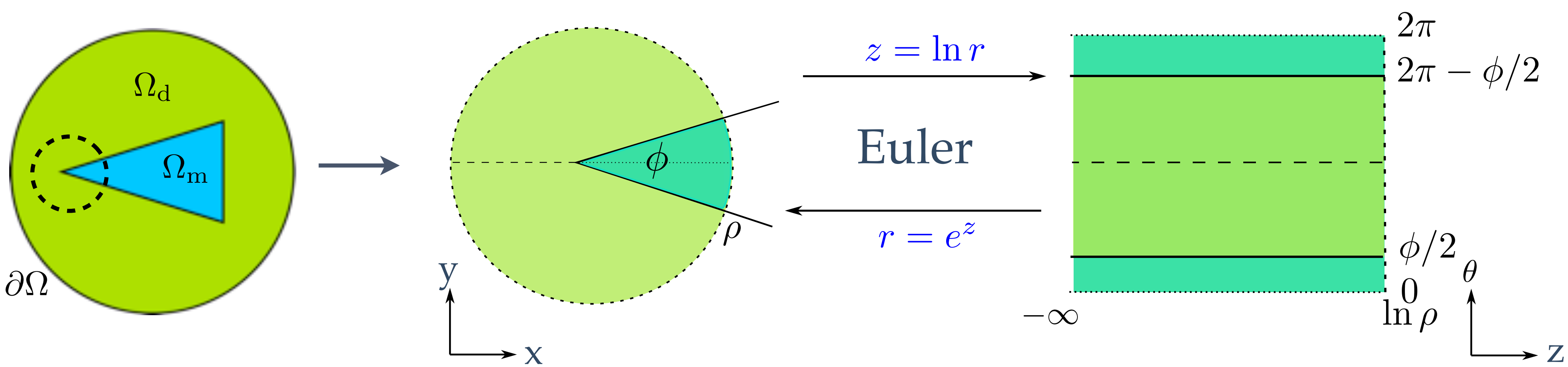
$$\boxed{-\varepsilon^{-1} r\partial_r(r\partial_r u) - \partial_\theta\left(\varepsilon^{-1}\partial_\theta u\right)} + \beta^2\varepsilon^{-1} r^2 u = \omega^2 \mu r^2 u$$

Comportement à l'infini dans le guide

$$\boxed{-\mathrm{div}\left(\varepsilon^{-1}\nabla u\right)} + \beta^2\varepsilon^{-1} e^{2z} u = \omega^2 \mu e^{2z} u$$

Analyse des singularités de coins

Pour simplifier, on considère ce qu'il se passe pour un seul coin.



Comportement limite au coin

$$\boxed{-\varepsilon^{-1} r\partial_r(r\partial_r u) - \partial_\theta\left(\varepsilon^{-1}\partial_\theta u\right)} + \beta^2\varepsilon^{-1}r^2 u = \omega^2\mu r^2 u$$

Comportement à l'infini dans le guide

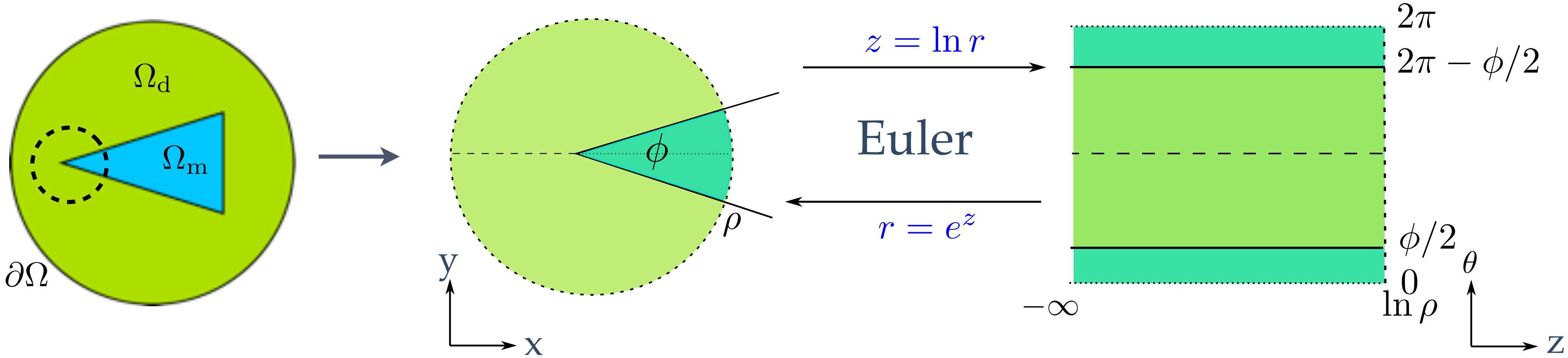
$$\boxed{-\mathrm{div}\left(\varepsilon^{-1}\nabla u\right)} + \beta^2\varepsilon^{-1}e^{2z}u = \omega^2\mu e^{2z}u$$

Recherche des solutions $u(z,\theta) = e^{\lambda z}\phi(\theta)$

Les λ sont les exposants de singularité.

Analyse des singularités de coins

Pour simplifier, on considère ce qu'il se passe pour un seul coin.



Comportement limite au coin

$$\boxed{-\varepsilon^{-1} r\partial_r(r\partial_r u) - \partial_\theta\left(\varepsilon^{-1}\partial_\theta u\right)} + \beta^2\varepsilon^{-1} r^2 u = \omega^2 \mu r^2 u$$

Comportement à l'infini dans le guide

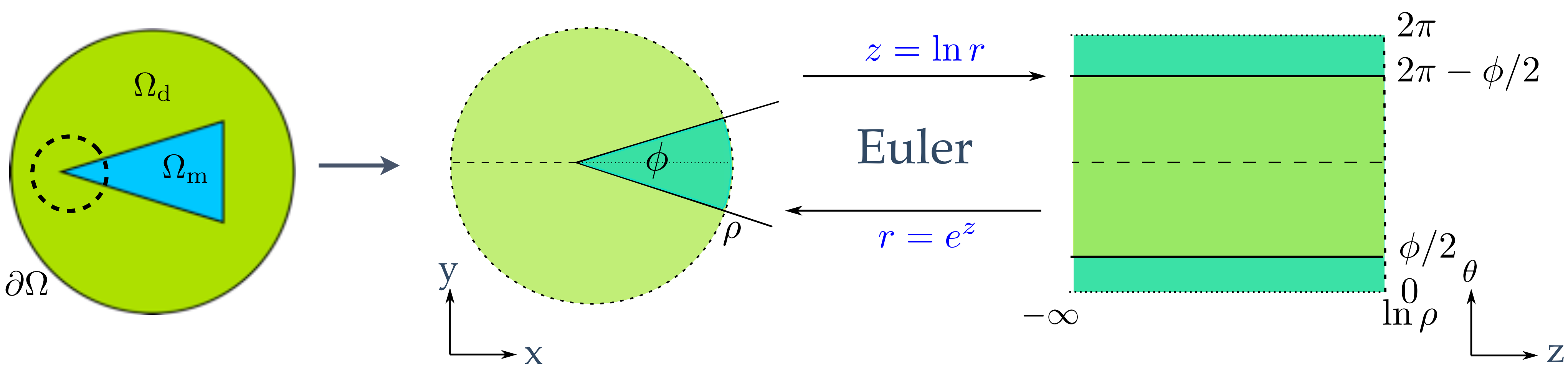
$$\boxed{-\mathrm{div}\left(\varepsilon^{-1}\nabla u\right)} + \beta^2\varepsilon^{-1} e^{2z} u = \omega^2 \mu e^{2z} u$$

Recherche des solutions $u(z,\theta) = e^{\lambda z}\phi(\theta)$

Les λ sont les exposants de singularité.

Analyse des singularités de coins

Pour simplifier, on considère ce qu'il se passe pour un seul coin.



Comportement limite au coin

$$\boxed{-\varepsilon^{-1} r\partial_r(r\partial_r u) - \partial_\theta\left(\varepsilon^{-1}\partial_\theta u\right)} + \beta^2\varepsilon^{-1}r^2 u = \omega^2\mu r^2 u$$

Comportement à l'infini dans le guide

$$\boxed{-\mathrm{div}\left(\varepsilon^{-1}\nabla u\right)} + \beta^2\varepsilon^{-1}e^{2z}u = \omega^2\mu e^{2z}u$$

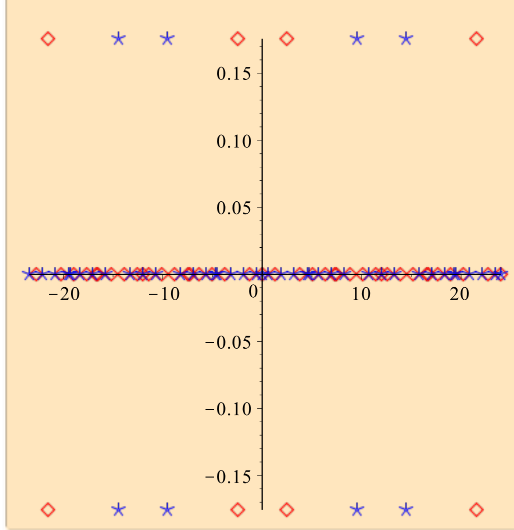
Recherche des solutions $u(z,\theta) = e^{\lambda z}\phi(\theta)$

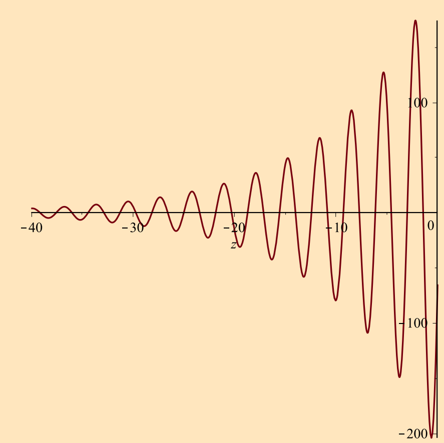
Les λ sont les exposants de singularité.

$\boxed{\kappa_\varepsilon \notin I_c}$

les modes sont évanescents

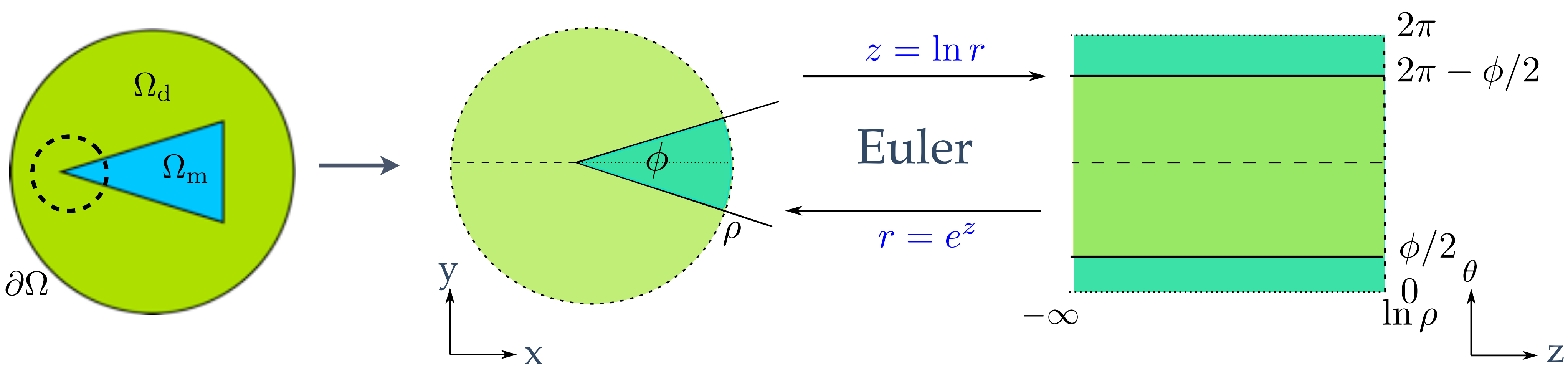
$\Re e(\lambda) > 0,\ \forall \lambda \neq 0$





Analyse des singularités de coins

Pour simplifier, on considère ce qu'il se passe pour un seul coin.



Comportement limite au coin

$$\boxed{-\varepsilon^{-1} r\partial_r(r\partial_r u) - \partial_\theta\left(\varepsilon^{-1}\partial_\theta u\right)} + \beta^2\varepsilon^{-1}r^2 u = \omega^2\mu r^2 u$$

Comportement à l'infini dans le guide

$$\boxed{-\mathrm{div}\left(\varepsilon^{-1}\nabla u\right)} + \beta^2\varepsilon^{-1}e^{2z}u = \omega^2\mu e^{2z}u$$

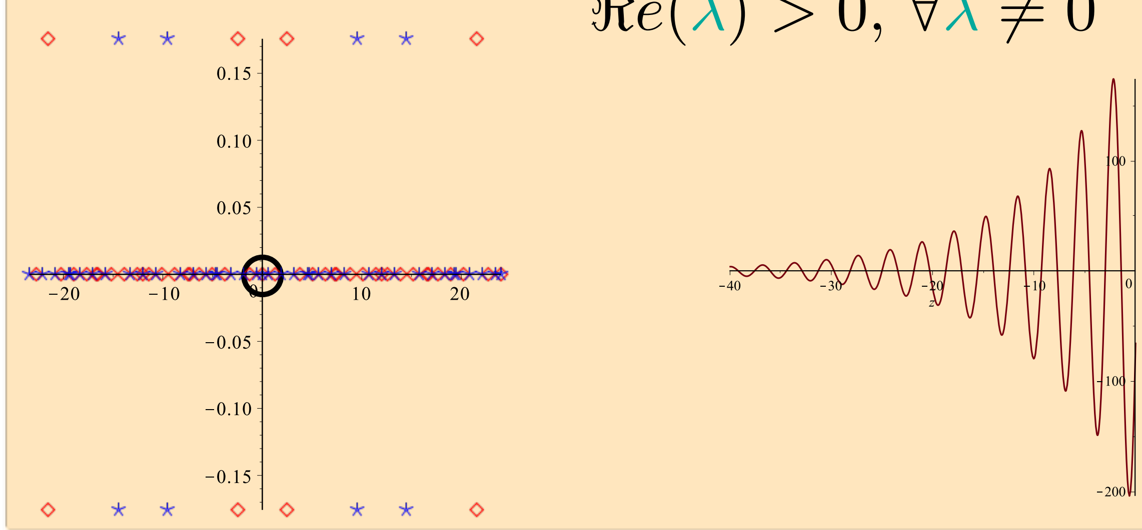
Recherche des solutions $u(z,\theta) = e^{\lambda z}\phi(\theta)$

Les λ sont les exposants de singularité.

$\boxed{\kappa_\varepsilon \notin I_c}$

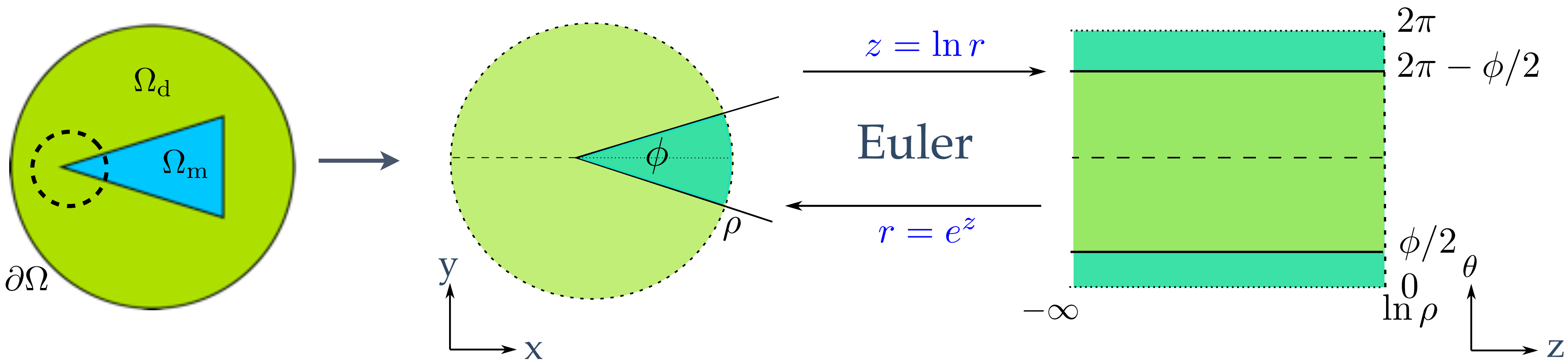
les modes sont évanescents

$\Re e(\lambda) > 0,\ \forall\lambda \neq 0$



Analyse des singularités de coins

Pour simplifier, on considère ce qu'il se passe pour un seul coin.



Comportement limite au coin

$$\boxed{-\varepsilon^{-1} r\partial_r(r\partial_r u) - \partial_\theta\left(\varepsilon^{-1}\partial_\theta u\right)} + \beta^2\varepsilon^{-1}r^2 u = \omega^2\mu r^2 u$$

Comportement à l'infini dans le guide

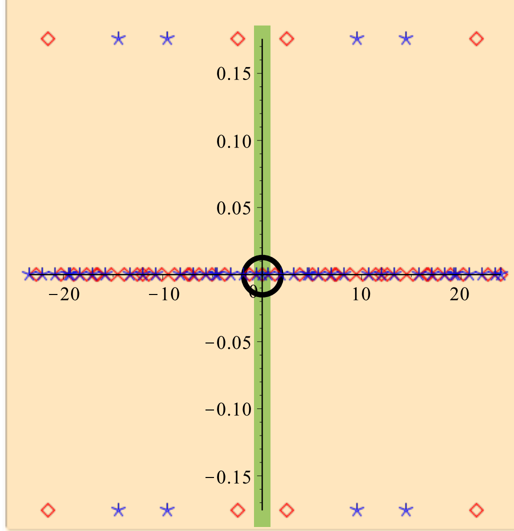
$$\boxed{-\mathrm{div}\left(\varepsilon^{-1}\nabla u\right)} + \beta^2\varepsilon^{-1}e^{2z}u = \omega^2\mu e^{2z}u$$

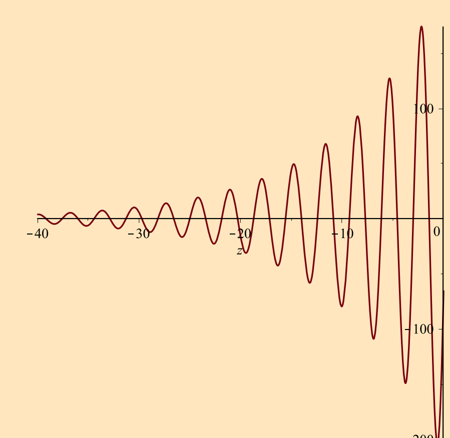
Recherche des solutions $u(z,\theta) = e^{\lambda z}\phi(\theta)$

Les λ sont les exposants de singularité.

$\boxed{\kappa_\varepsilon \notin I_c}$

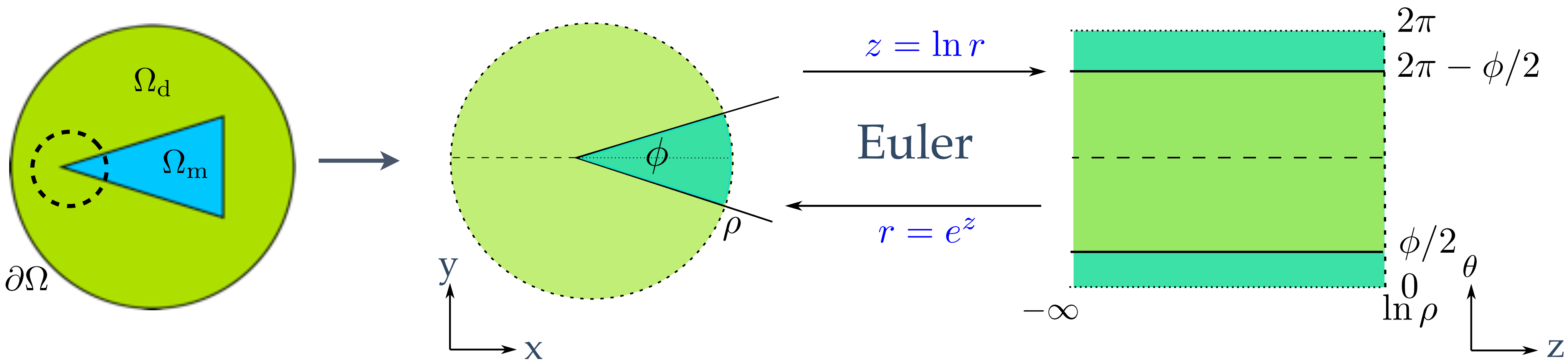
les modes sont évanescents $\Re e(\lambda) > 0,\ \forall\lambda \neq 0$





Analyse des singularités de coins

Pour simplifier, on considère ce qu'il se passe pour un seul coin.



Comportement limite au coin

$$\boxed{-\varepsilon^{-1} r\partial_r(r\partial_r u) - \partial_\theta\left(\varepsilon^{-1}\partial_\theta u\right)} + \beta^2\varepsilon^{-1} r^2 u = \omega^2 \mu r^2 u$$

Comportement à l'infini dans le guide

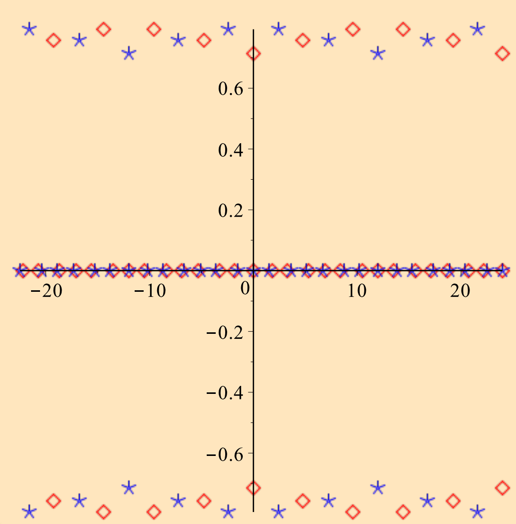
$$\boxed{-\mathrm{div}\left(\varepsilon^{-1}\nabla u\right)} + \beta^2\varepsilon^{-1} e^{2z} u = \omega^2 \mu e^{2z} u$$

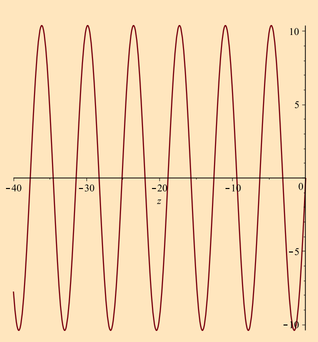
Recherche des solutions $u(z, \theta) = e^{\lambda z}\phi(\theta)$

Les λ sont les exposants de singularité.

$\boxed{\kappa_\varepsilon \in I_c}$ apparition d'un mode propagatif

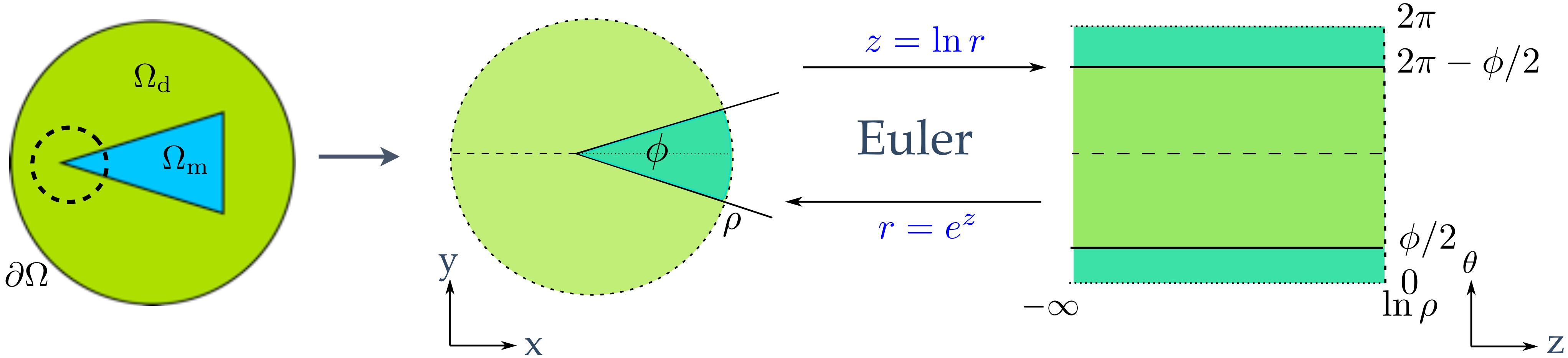
$$s(z, \theta) = e^{i\eta z}\phi(\theta)$$





Analyse des singularités de coins

Pour simplifier, on considère ce qu'il se passe pour un seul coin.



Comportement limite au coin

$$\boxed{-\varepsilon^{-1} r\partial_r(r\partial_r u) - \partial_\theta\left(\varepsilon^{-1}\partial_\theta u\right)} + \beta^2\varepsilon^{-1} r^2 u = \omega^2 \mu r^2 u$$

Comportement à l'infini dans le guide

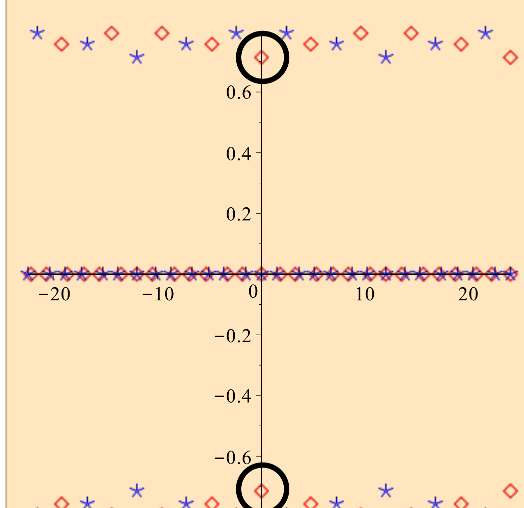
$$\boxed{-\mathrm{div}\left(\varepsilon^{-1}\nabla u\right)} + \beta^2\varepsilon^{-1} e^{2z} u = \omega^2 \mu e^{2z} u$$

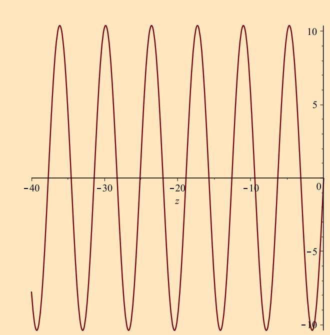
Recherche des solutions $u(z,\theta) = e^{\lambda z}\phi(\theta)$

Les λ sont les exposants de singularité.

$\boxed{\kappa_\varepsilon \in I_c}$ apparition d'un mode propagatif

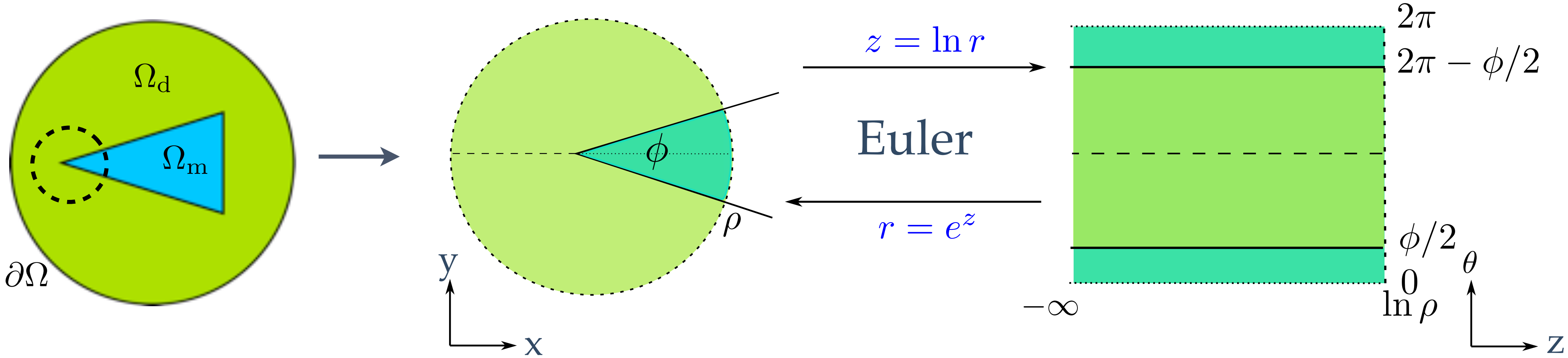
$s(z,\theta) = e^{i\eta z}\phi(\theta)$





Analyse des singularités de coins

Pour simplifier, on considère ce qu'il se passe pour un seul coin.



Comportement limite au coin

$$\boxed{-\varepsilon^{-1} r\partial_r(r\partial_r u) - \partial_\theta\left(\varepsilon^{-1}\partial_\theta u\right)} + \beta^2\varepsilon^{-1}r^2 u = \omega^2\mu r^2 u$$

Dans le plan physique, les solutions sont

$$u(r,\theta) = r^\lambda\phi(\theta)$$

Comportement à l'infini dans le guide

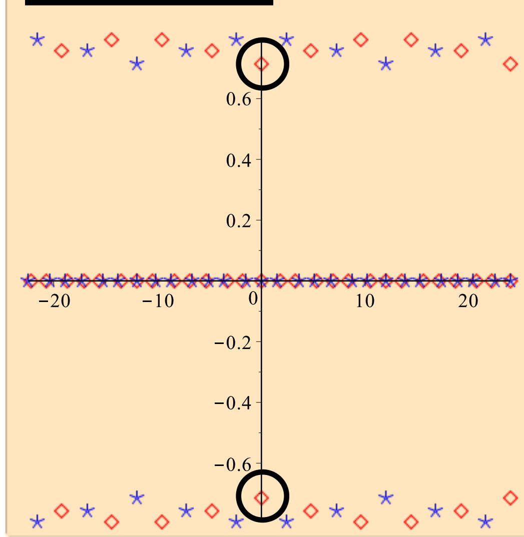
$$\boxed{-\mathrm{div}\left(\varepsilon^{-1}\nabla u\right)} + \beta^2\varepsilon^{-1}e^{2z}u = \omega^2\mu e^{2z}u$$

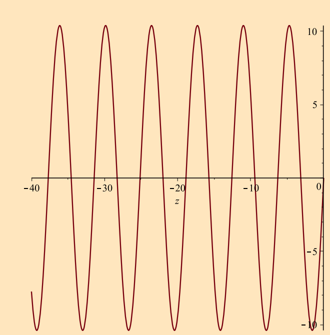
Recherche des solutions $u(z,\theta) = e^{\lambda z}\phi(\theta)$

Les λ sont les exposants de singularité.

$\boxed{\kappa_\varepsilon \in I_c}$ apparition d'un mode propagatif

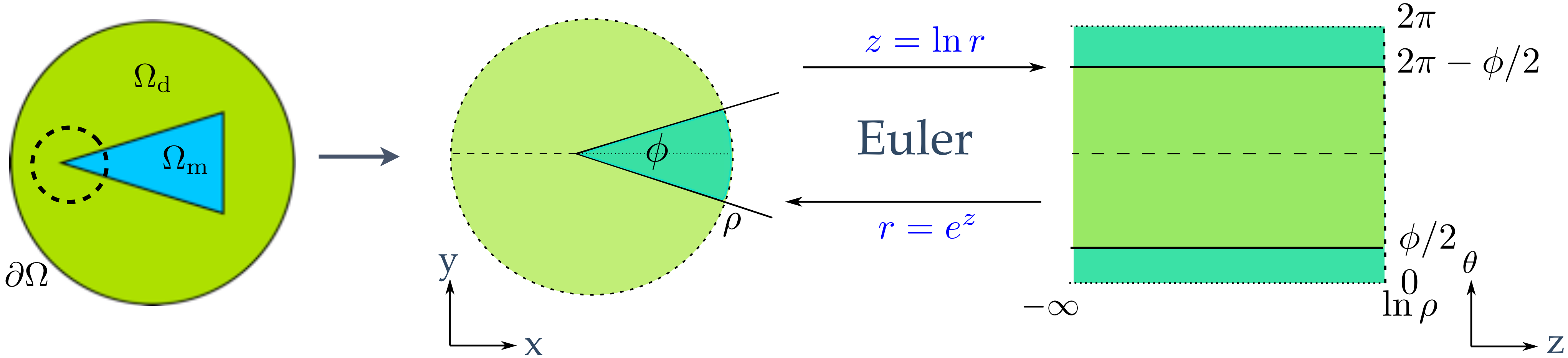
$$s(z,\theta) = e^{i\eta z}\phi(\theta)$$





Analyse des singularités de coins

Pour simplifier, on considère ce qu'il se passe pour un seul coin.



Comportement limite au coin

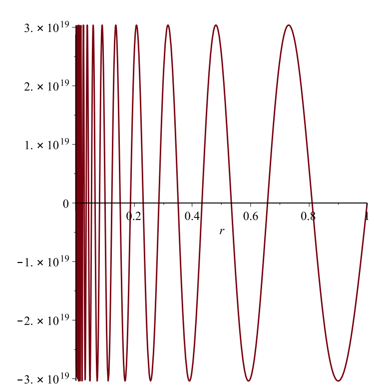
$$\boxed{-\varepsilon^{-1} r\partial_r(r\partial_r u) - \partial_\theta\left(\varepsilon^{-1}\partial_\theta u\right)} + \beta^2\varepsilon^{-1} r^2 u = \omega^2 \mu r^2 u$$

Dans le plan physique, les solutions sont

$$u(r,\theta) = r^\lambda \phi(\theta)$$

Apparition d'une singularité hyper oscillante

$$s(r,\theta) = e^{i\eta \ln r}\phi(\theta) \notin H^1$$



Comportement à l'infini dans le guide

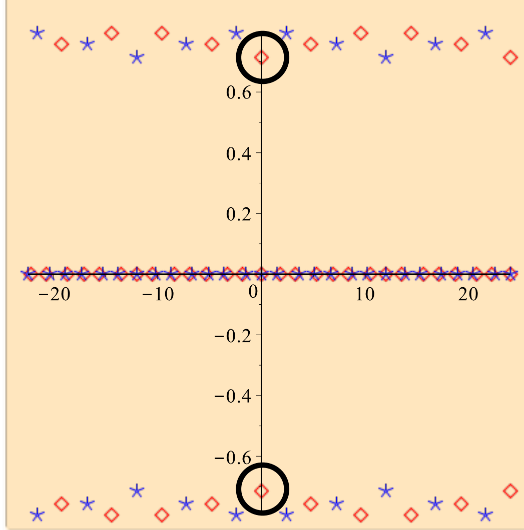
$$\boxed{-\mathrm{div}\left(\varepsilon^{-1}\nabla u\right)} + \beta^2\varepsilon^{-1} e^{2z} u = \omega^2 \mu e^{2z} u$$

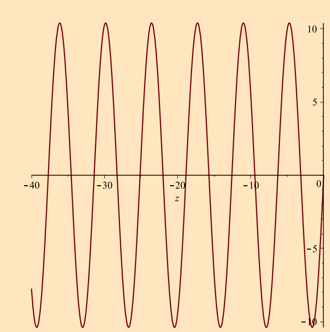
Recherche des solutions $u(z,\theta) = e^{\lambda z}\phi(\theta)$

Les λ sont les exposants de singularité.

$\boxed{\kappa_\varepsilon \in I_c}$ apparition d'un mode propagatif

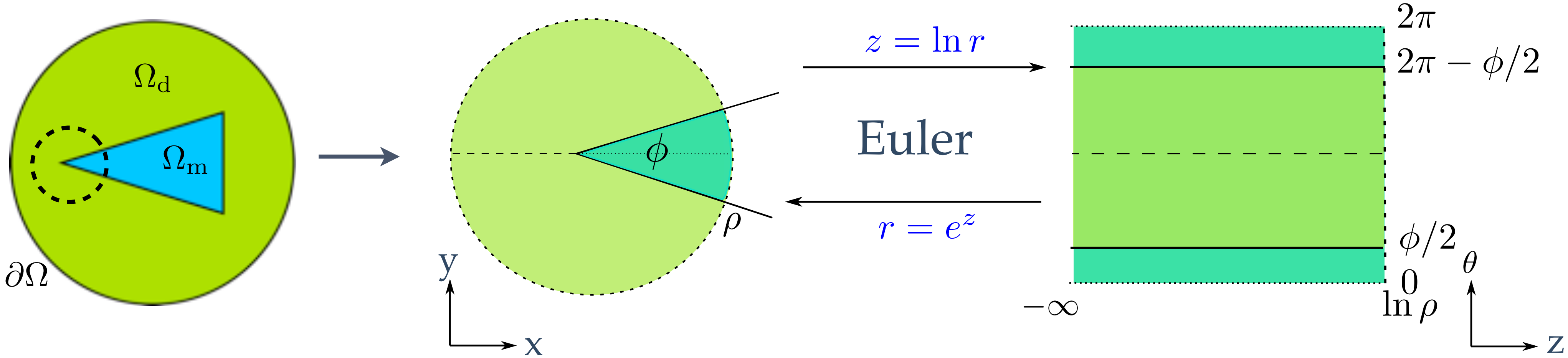
$$s(z,\theta) = e^{i\eta z}\phi(\theta)$$





Analyse des singularités de coins

Pour simplifier, on considère ce qu'il se passe pour un seul coin.



Comportement limite au coin

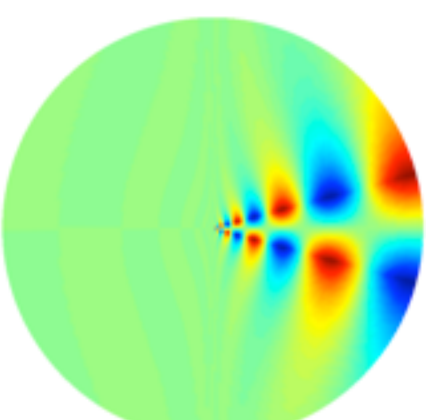
$$\boxed{-\varepsilon^{-1} r\partial_r(r\partial_r u) - \partial_\theta\left(\varepsilon^{-1}\partial_\theta u\right)} + \beta^2\varepsilon^{-1} r^2 u = \omega^2 \mu r^2 u$$

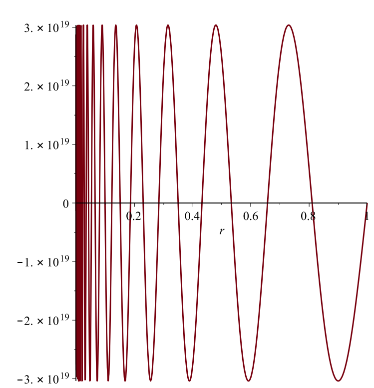
Dans le plan physique, les solutions sont

$$u(r,\theta) = r^\lambda \phi(\theta)$$

Apparition d'une singularité hyper oscillante

$$s(r,\theta) = e^{i\eta \ln r}\phi(\theta) \notin H^1$$





Onde de trou noir.

Comportement à l'infini dans le guide

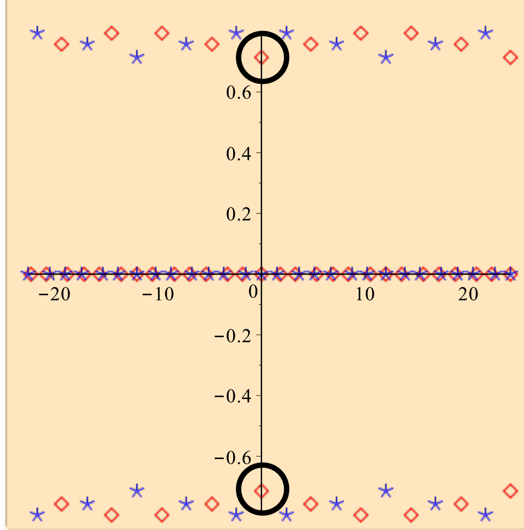
$$\boxed{-\mathrm{div}\left(\varepsilon^{-1}\nabla u\right)} + \beta^2\varepsilon^{-1} e^{2z} u = \omega^2 \mu e^{2z} u$$

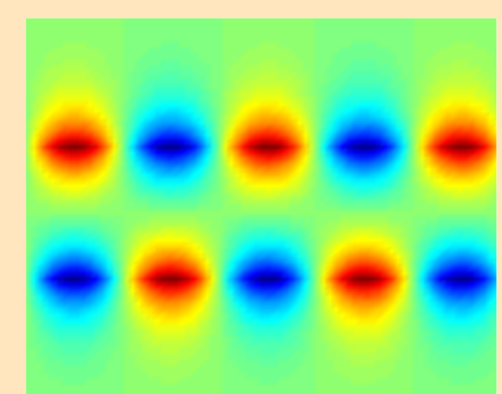
Recherche des solutions $u(z,\theta) = e^{\lambda z}\phi(\theta)$

Les λ sont les exposants de singularité.

$\boxed{\kappa_\varepsilon \in I_c}$ apparition d'un mode propagatif

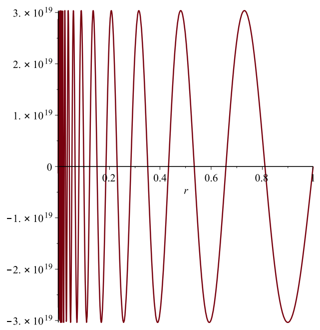
$$s(z,\theta) = e^{i\eta z}\phi(\theta)$$





Conséquences et extensions d'opérateur

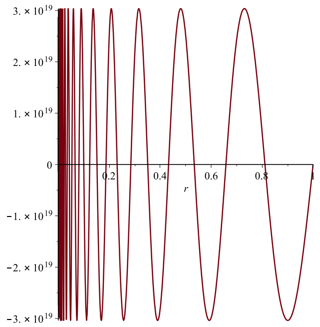
$s^{\pm}(r,\theta) := \chi(r)(e^{\pm i\eta \ln r}\phi(\theta)) \notin D(A)$ χ fonction de troncature au voisinage du coin.



$$D(A) := \{v \in H_0^1(\Omega) | \operatorname{div}(\varepsilon^{-1}\nabla v) \in L^2(\Omega)\}$$

Conséquences et extensions d'opérateur

$s^{\pm}(r,\theta) := \chi(r)(e^{\pm i\eta \ln r}\phi(\theta)) \notin D(A)$ χ fonction de troncature au voisinage du coin.

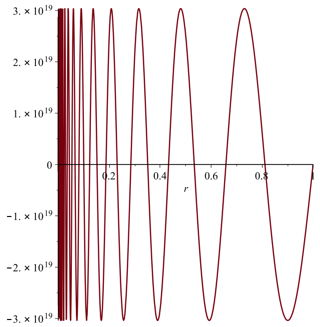


$$D(A) := \{v \in H_0^1(\Omega) |\, \mathrm{div}(\varepsilon^{-1}\nabla v) \in L^2(\Omega)\}$$

Avec l'apparition des ondes de trou noir :

Conséquences et extensions d'opérateur

$s^{\pm}(r,\theta) := \chi(r)(e^{\pm i\eta \ln r}\phi(\theta)) \notin D(A)$ χ fonction de troncature au voisinage du coin.



$$D(A) := \{v \in H_0^1(\Omega) |\, \mathrm{div}(\varepsilon^{-1}\nabla v) \in L^2(\Omega)\}$$

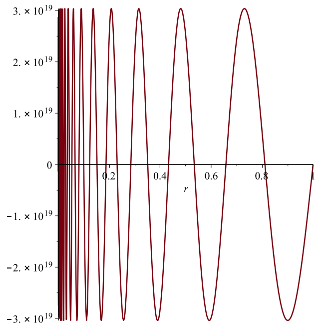
Avec l'apparition des ondes de trou noir :

$A(\beta)$ est ni auto-adjoint ni à résolvante compacte et $\boxed{\sigma(A(\beta)) = \mathbb{C}}$

Ramdani (1999), Bonnet-Ben Dhia, Chesnel et Claeys (2013).

Conséquences et extensions d'opérateur

$s^{\pm}(r,\theta) := \chi(r)(e^{\pm i\eta \ln r}\phi(\theta)) \notin D(A)$ χ fonction de troncature au voisinage du coin.



$$D(A) := \{v \in H_0^1(\Omega) |\, \mathrm{div}(\varepsilon^{-1}\nabla v) \in L^2(\Omega)\}$$

Avec l'apparition des ondes de trou noir :

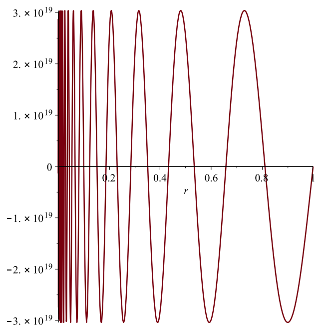
$A(\beta)$ est ni auto-adjoint ni à résolvante compacte et $\boxed{\sigma(A(\beta)) = \mathbb{C}}$

Ramdani (1999), Bonnet-Ben Dhia, Chesnel et Claeys (2013).

Il est nécessaire de prendre en compte les singularités pour récupérer au moins le caractère discret du spectre (et un cadre Fredholm). On définit des extensions de l'opérateur.

Conséquences et extensions d'opérateur

$s^{\pm}(r,\theta) := \chi(r)(e^{\pm i\eta \ln r}\phi(\theta)) \notin D(A)$ χ fonction de troncature au voisinage du coin.



$$D(A) := \{v \in H_0^1(\Omega) |\, \mathrm{div}(\varepsilon^{-1}\nabla v) \in L^2(\Omega)\}$$

Avec l'apparition des ondes de trou noir :

$A(\beta)$ est ni auto-adjoint ni à résolvante compacte et $\boxed{\sigma(A(\beta)) = \mathbb{C}}$

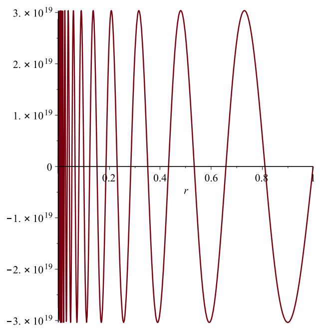
Ramdani (1999), Bonnet-Ben Dhia, Chesnel et Claeys (2013).

Il est nécessaire de prendre en compte les singularités pour récupérer au moins le caractère discret du spectre (et un cadre Fredholm). On définit des extensions de l'opérateur.

$\mathcal{A}(\beta) : D(\mathcal{A}) \subset L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ tel que $\mathcal{A}(\beta)u := -\mu^{-1}(\mathrm{div}(\varepsilon^{-1}\nabla u) - \beta^2\varepsilon^{-1}u)$

Conséquences et extensions d'opérateur

$s^{\pm}(r,\theta) := \chi(r)(e^{\pm i\eta \ln r}\phi(\theta)) \notin D(A)$ χ fonction de troncature au voisinage du coin.



$$D(A) := \{v \in H_0^1(\Omega) |\, \mathrm{div}(\varepsilon^{-1}\nabla v) \in L^2(\Omega)\}$$

Avec l'apparition des ondes de trou noir :

$A(\beta)$ est ni auto-adjoint ni à résolvante compacte et $\boxed{\sigma(A(\beta)) = \mathbb{C}}$

Ramdani (1999), Bonnet-Ben Dhia, Chesnel et Claeys (2013).

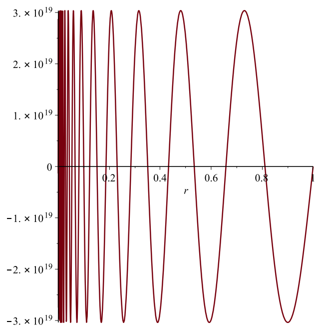
Il est nécessaire de prendre en compte les singularités pour récupérer au moins le caractère discret du spectre (et un cadre Fredholm). On définit des extensions de l'opérateur.

$\mathcal{A}(\beta) : D(\mathcal{A}) \subset L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ tel que $\mathcal{A}(\beta)u := -\mu^{-1}(\mathrm{div}(\varepsilon^{-1}\nabla u) - \beta^2\varepsilon^{-1}u)$

$D(\mathcal{A}) := D(A) \oplus \{\tau s^{+} + s^{-}\}$ $\tau \in \mathbb{C}$

Conséquences et extensions d'opérateur

$s^{\pm}(r,\theta) := \chi(r)(e^{\pm i\eta \ln r}\phi(\theta)) \notin D(A)$ χ fonction de troncature au voisinage du coin.



$$D(A) := \{v \in H^1_0(\Omega) |\, \mathrm{div}(\varepsilon^{-1}\nabla v) \in L^2(\Omega)\}$$

Avec l'apparition des ondes de trou noir :

$A(\beta)$ est ni auto-adjoint ni à résolvante compacte et $\boxed{\sigma(A(\beta)) = \mathbb{C}}$

Ramdani (1999), Bonnet-Ben Dhia, Chesnel et Claeys (2013).

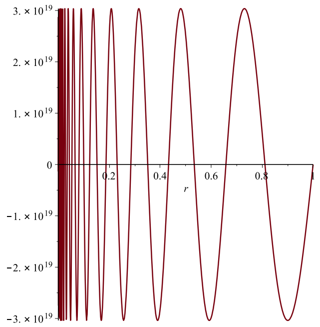
Il est nécessaire de prendre en compte les singularités pour récupérer au moins le caractère discret du spectre (et un cadre Fredholm). On définit des extensions de l'opérateur.

$\mathcal{A}(\beta) : D(\mathcal{A}) \subset L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ tel que $\mathcal{A}(\beta)u := -\mu^{-1}(\mathrm{div}(\varepsilon^{-1}\nabla u) - \beta^2\varepsilon^{-1}u)$

$D(\mathcal{A}) := D(A) \oplus \{\tau s^+ + s^-\}$ $\tau \in \mathbb{C}$ $\forall u \in D(\mathcal{A}),\quad u = u_A + c(\tau s^+ + s^-),\quad u_A \in D(A)$

Conséquences et extensions d'opérateur

$s^{\pm}(r,\theta) := \chi(r)(e^{\pm i\eta \ln r}\phi(\theta)) \notin D(A)$ χ fonction de troncature au voisinage du coin.



$$D(A) := \{v \in H^1_0(\Omega) |\, \mathrm{div}(\varepsilon^{-1}\nabla v) \in L^2(\Omega)\}$$

Avec l'apparition des ondes de trou noir :

$A(\beta)$ est ni auto-adjoint ni à résolvante compacte et $\boxed{\sigma(A(\beta)) = \mathbb{C}}$

Ramdani (1999), Bonnet-Ben Dhia, Chesnel et Claeys (2013).

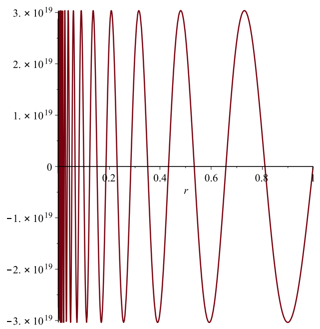
Il est nécessaire de prendre en compte les singularités pour récupérer au moins le caractère discret du spectre (et un cadre Fredholm). On définit des extensions de l'opérateur.

$\mathcal{A}(\beta) : D(\mathcal{A}) \subset L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ tel que $\mathcal{A}(\beta)u := -\mu^{-1}(\mathrm{div}(\varepsilon^{-1}\nabla u) - \beta^2\varepsilon^{-1}u)$

$D(\mathcal{A}) := D(A) \oplus \{\tau s^+ + s^-\}$ $\tau \in \mathbb{C}$ $\forall u \in D(\mathcal{A}),\quad u = u_A + c(\tau s^+ + s^-),\quad u_A \in D(A)$

Conséquences et extensions d'opérateur

$s^{\pm}(r,\theta) := \chi(r)(e^{\pm i\eta \ln r}\phi(\theta)) \notin D(A)$ χ fonction de troncature au voisinage du coin.



$$D(A) := \{v \in H^1_0(\Omega) |\, \mathrm{div}(\varepsilon^{-1}\nabla v) \in L^2(\Omega)\}$$

Avec l'apparition des ondes de trou noir :

$A(\beta)$ est ni auto-adjoint ni à résolvante compacte et $\boxed{\sigma(A(\beta)) = \mathbb{C}}$

Ramdani (1999), Bonnet-Ben Dhia, Chesnel et Claeys (2013).

Il est nécessaire de prendre en compte les singularités pour récupérer au moins le caractère discret du spectre (et un cadre Fredholm). On définit des extensions de l'opérateur.

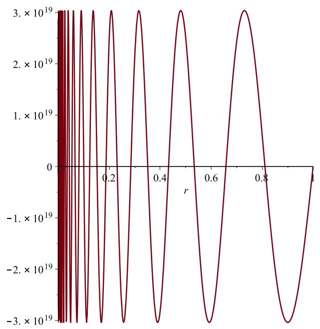
$$\boxed{\begin{array}{l} \mathcal{A}(\beta) : D(\mathcal{A}) \subset L^2(\Omega) \to L^2(\Omega) \text{ tel que } \mathcal{A}(\beta)u := -\mu^{-1}(\mathrm{div}(\varepsilon^{-1}\nabla u) - \beta^2\varepsilon^{-1}u) \\ D(\mathcal{A}) := D(A) \oplus \{\tau s^+ + s^-\} \quad \tau \in \mathbb{C} \quad \forall u \in D(\mathcal{A}), \quad u = u_A + c(\tau s^+ + s^-), \quad u_A \in D(A) \end{array}}$$

Si $|\tau| = 1$ alors l'opérateur étendu est auto-adjoint (et à révolante compacte).

Bonnet-Ben Dhia, Dauge et Ramdani (1999), Chesnel, Claeys et Nazarov (2015).

Conséquences et extensions d'opérateur

$s^{\pm}(r,\theta) := \chi(r)(e^{\pm i\eta \ln r}\phi(\theta)) \notin D(A)$ χ fonction de troncature au voisinage du coin.



$$D(A) := \{v \in H_0^1(\Omega) |\, \mathrm{div}(\varepsilon^{-1}\nabla v) \in L^2(\Omega)\}$$

Avec l'apparition des ondes de trou noir :

$A(\beta)$ est ni auto-adjoint ni à résolvante compacte et $\boxed{\sigma(A(\beta)) = \mathbb{C}}$

Ramdani (1999), Bonnet-Ben Dhia, Chesnel et Claeys (2013).

Il est nécessaire de prendre en compte les singularités pour récupérer au moins le caractère discret du spectre (et un cadre Fredholm). On définit des extensions de l'opérateur.

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathcal{A}(\beta) : D(\mathcal{A}) \subset L^2(\Omega) \to L^2(\Omega) \text{ tel que } \mathcal{A}(\beta)u := -\mu^{-1}(\mathrm{div}(\varepsilon^{-1}\nabla u) - \beta^2\varepsilon^{-1}u) \\ D(\mathcal{A}) := D(A) \oplus \{\cancel{\tau s^+} + s^-\} \;\; \tau \in \mathbb{C} \quad \forall u \in D(\mathcal{A}), \quad u = u_A + c(\cancel{\tau s^+} + s^-), \quad u_A \in D(A) \end{array}}$$

Si $|\tau| = 1$ alors l'opérateur étendu est auto-adjoint (et à révolante compacte).

Bonnet-Ben Dhia, Dauge et Ramdani (1999), Chesnel, Claeys et Nazarov (2015).

Ici le bon choix est $\tau = 0$, soit une extension non auto-adjointe.

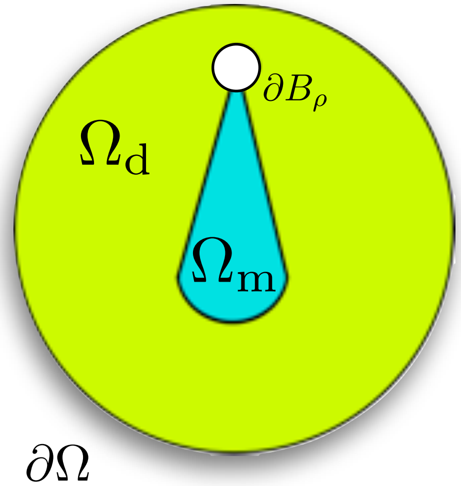
Tri des valeurs propres par flux d'énergie

Avec l'extension choisie nous avons : $\forall u \in D(\mathcal{A}),\quad \boxed{u = u_A + c s^-},\quad u_A \in D(A)$

$$s^-(r,\theta) := \chi(r)(e^{-i\eta \ln r}\phi(\theta)) \notin D(A) \quad \eta > 0$$

Tri des valeurs propres par flux d'énergie

Avec l'extension choisie nous avons : $\forall u \in D(\mathcal{A})$, $\boxed{u = u_A + cs^-}$, $u_A \in D(A)$



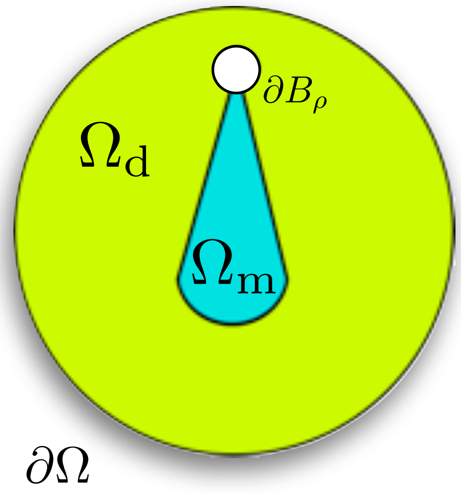
$$s^-(r,\theta) := \chi(r)(e^{-i\eta \ln r}\phi(\theta)) \notin D(A) \quad \eta > 0$$

$$-\mathrm{div}\left(\varepsilon^{-1}\nabla u\right) + \beta^2\varepsilon^{-1}u = \omega^2\mu u \qquad \Omega/B_\rho \qquad \boxed{\beta \in \mathbb{R}}$$

$$u = 0 \qquad \partial\Omega$$

Tri des valeurs propres par flux d'énergie

Avec l'extension choisie nous avons : $\forall u \in D(\mathcal{A})$, $\boxed{u = u_A + cs^-}$, $u_A \in D(A)$



$$s^-(r,\theta) := \chi(r)(e^{-i\eta \ln r}\phi(\theta)) \notin D(A) \quad \eta > 0$$

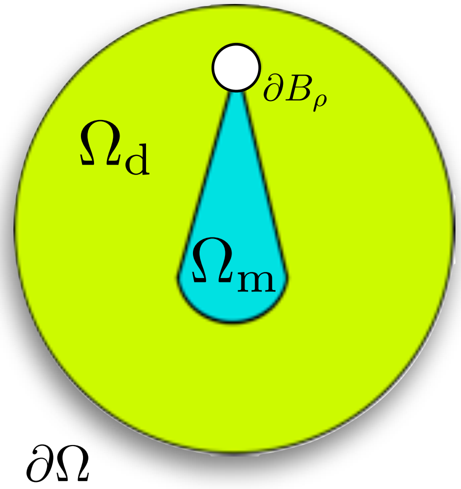
$$-\mathrm{div}\left(\varepsilon^{-1}\nabla u\right) + \beta^2 \varepsilon^{-1} u = \omega^2 \mu u \qquad \Omega / B_\rho \qquad \boxed{\beta \in \mathbb{R}}$$

$$u = 0 \qquad \partial\Omega$$

Par la formule de Green, nous avons

Tri des valeurs propres par flux d'énergie

Avec l'extension choisie nous avons : $\forall u \in D(\mathcal{A})$, $\boxed{u = u_A + cs^-}$, $u_A \in D(A)$



$$s^-(r,\theta) := \chi(r)(e^{-i\eta \ln r}\phi(\theta)) \notin D(A) \quad \eta > 0$$

$$-\mathrm{div}\left(\varepsilon^{-1}\nabla u\right) + \beta^2\varepsilon^{-1}u = \omega^2\mu u \qquad \Omega/B_\rho \qquad \boxed{\beta \in \mathbb{R}}$$

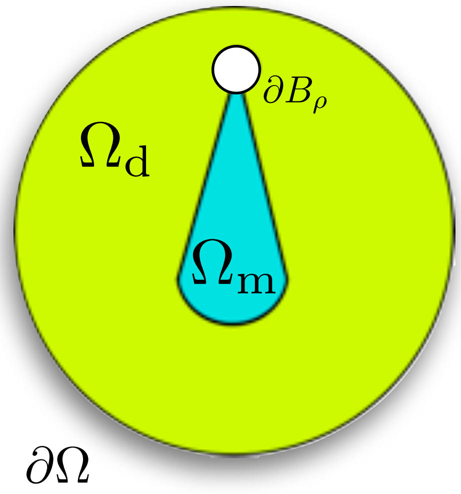
$$u = 0 \qquad \partial\Omega$$

Par la formule de Green, nous avons

$$\lim_{\rho\to 0} \Im m \left(\int_{\partial B_\rho} \varepsilon^{-1}\partial_r u\,\overline{u}\,d\sigma \right) = \Im m\left(\omega^2\right)\int_\Omega \mu|u|^2\,d\mathbf{x}$$

Tri des valeurs propres par flux d'énergie

Avec l'extension choisie nous avons : $\forall u \in D(\mathcal{A})$, $\boxed{u = u_A + cs^-}$, $\quad u_A \in D(A)$



$$s^-(r,\theta) := \chi(r)(e^{-i\eta \ln r}\phi(\theta)) \notin D(A) \quad \eta > 0$$

$$-\mathrm{div}\,(\varepsilon^{-1}\nabla u) + \beta^2\varepsilon^{-1}u = \omega^2\mu u \qquad \Omega/B_\rho \qquad \boxed{\beta \in \mathbb{R}}$$

$$u = 0 \qquad \partial\Omega$$

Par la formule de Green, nous avons

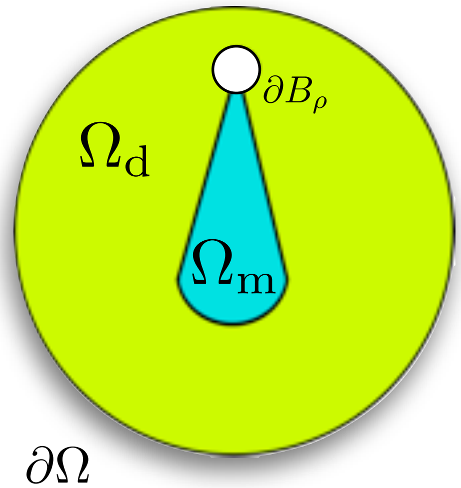
$$\lim_{\rho\to 0} \Im m \left(\int_{\partial B_\rho} \varepsilon^{-1}\partial_r u\,\overline{u}\,d\sigma \right) = \Im m\,(\omega^2) \int_\Omega \mu|u|^2\,d\mathbf{x}$$

et la théorie de Kondratiev nous donne

$$-|c|^2\eta \int_0^{2\pi} \varepsilon^{-1}|\phi(\theta)|^2\,d\theta = \Im m\,(\omega^2) \underbrace{\int_\Omega \mu|u|^2\,d\mathbf{x}}_{\geq 0}.$$

Tri des valeurs propres par flux d'énergie

Avec l'extension choisie nous avons : $\forall u \in D(\mathcal{A}),\quad \boxed{u = u_A + c s^-},\qquad u_A \in D(A)$



$$s^-(r,\theta) := \chi(r)(e^{-i\eta \ln r}\phi(\theta)) \notin D(A) \quad \eta > 0$$

$$-\mathrm{div}\,(\varepsilon^{-1}\nabla u) + \beta^2\varepsilon^{-1}u = \omega^2 \mu u \qquad \Omega / B_\rho \qquad \boxed{\beta \in \mathbb{R}}$$

$$u = 0 \qquad \partial\Omega$$

Par la formule de Green, nous avons

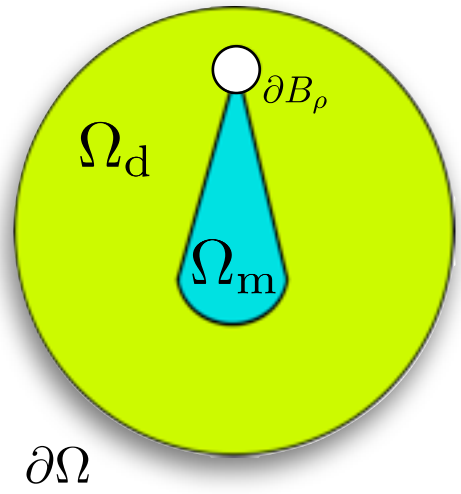
$$\lim_{\rho \to 0} \Im m \left(\int_{\partial B_\rho} \varepsilon^{-1} \partial_r u\, \overline{u}\, d\sigma \right) = \Im m\,(\omega^2) \int_\Omega \mu |u|^2\, d\mathbf{x}$$

et la théorie de Kondratiev nous donne

$$-|c|^2 \eta \underbrace{\int_0^{2\pi} \varepsilon^{-1} |\phi(\theta)|^2\, d\theta}_{\neq 0} = \Im m\,(\omega^2) \underbrace{\int_\Omega \mu |u|^2\, d\mathbf{x}}_{\geq 0}.$$

Tri des valeurs propres par flux d'énergie

Avec l'extension choisie nous avons : $\forall u \in D(\mathcal{A})$, $\boxed{u = u_A + c s^-}$, $\quad u_A \in D(A)$



$$s^-(r,\theta) := \chi(r)(e^{-i\eta \ln r}\phi(\theta)) \notin D(A) \quad \eta > 0$$

$$-\mathrm{div}\,(\varepsilon^{-1}\nabla u) + \beta^2\varepsilon^{-1}u = \omega^2\mu u \qquad \Omega/B_\rho \qquad \boxed{\beta \in \mathbb{R}}$$

$$u = 0$$

$\kappa_\varepsilon < -1$	$\kappa_\varepsilon > -1$
> 0	< 0

Par la formule de Green, nous avons

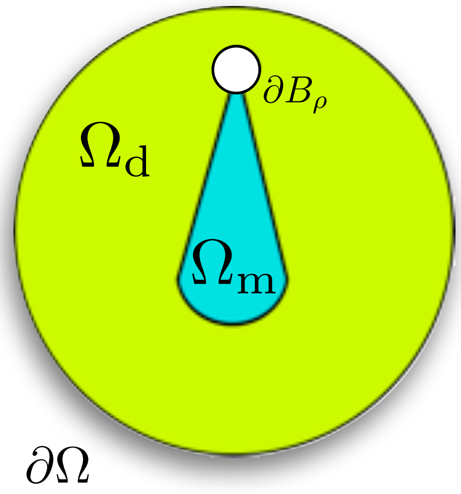
$$\lim_{\rho\to 0} \Im m \left(\int_{\partial B_\rho} \varepsilon^{-1}\partial_r u\,\overline{u}\,d\sigma \right) = \Im m\,(\omega^2) \int_\Omega \mu|u|^2\,d\Omega$$

et la théorie de Kondratiev nous donne

$$-|c|^2\eta \underbrace{\int_0^{2\pi} \varepsilon^{-1}|\phi(\theta)|^2\,d\theta}_{\neq 0} = \Im m\,(\omega^2) \underbrace{\int_\Omega \mu|u|^2\,d\mathbf{x}}_{\geq 0}.$$

Tri des valeurs propres par flux d'énergie

Avec l'extension choisie nous avons : $\forall u \in D(\mathcal{A})$, $\boxed{u = u_A + c s^-}$, $\quad u_A \in D(A)$



$$s^-(r,\theta) := \chi(r)(e^{-i\eta \ln r}\phi(\theta)) \notin D(A) \quad \eta > 0$$

$$-\mathrm{div}\,(\varepsilon^{-1}\nabla u) + \beta^2 \varepsilon^{-1} u = \omega^2 \mu u \qquad \Omega / B_\rho \qquad \boxed{\beta \in \mathbb{R}}$$

$$u = 0$$

$\kappa_\varepsilon < -1$	$\kappa_\varepsilon > -1$
> 0	< 0

Par la formule de Green, nous avon

$$\lim_{\rho \to 0} \Im m \left(\int_{\partial B_\rho} \varepsilon^{-1} \partial_r u \, \overline{u} \, d\sigma \right) = \Im m \, (\omega^2) \int_\Omega \mu |u|^2 \, d\Omega$$

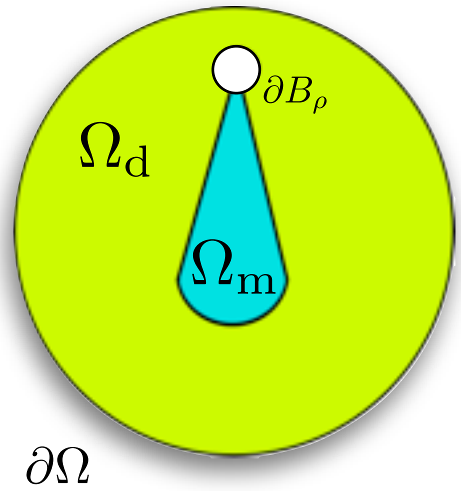
et la théorie de Kondratiev nous donne

$$-|c|^2 \eta \underbrace{\int_0^{2\pi} \varepsilon^{-1} |\phi(\theta)|^2 \, d\theta}_{\neq 0} = \Im m \, (\omega^2) \underbrace{\int_\Omega \mu |u|^2 \, d\mathbf{x}}_{\geq 0}.$$

$\omega^2 \in \mathbb{R}$ Les valeurs propres réelles n'excitent pas l'onde de trou noir ($u = u_A \in D(A)$)

Tri des valeurs propres par flux d'énergie

Avec l'extension choisie nous avons : $\forall u \in D(\mathcal{A})$, $\boxed{u = u_A + cs^-}$, $\quad u_A \in D(A)$



$$s^-(r,\theta) := \chi(r)(e^{-i\eta \ln r}\phi(\theta)) \notin D(A) \quad \eta > 0$$

$$-\mathrm{div}\,(\varepsilon^{-1}\nabla u) + \beta^2\varepsilon^{-1}u = \omega^2 \mu u \qquad \Omega/B_\rho \qquad \boxed{\beta \in \mathbb{R}}$$

$$u = 0$$

$\kappa_\varepsilon < -1$	$\kappa_\varepsilon > -1$
> 0	< 0

Par la formule de Green, nous avon

$$\lim_{\rho \to 0} \Im m \left(\int_{\partial B_\rho} \varepsilon^{-1}\partial_r u\, \overline{u}\, d\sigma \right) = \Im m\,(\omega^2) \int_\Omega \mu |u|^2\, d\Omega$$

et la théorie de Kondratiev nous donne

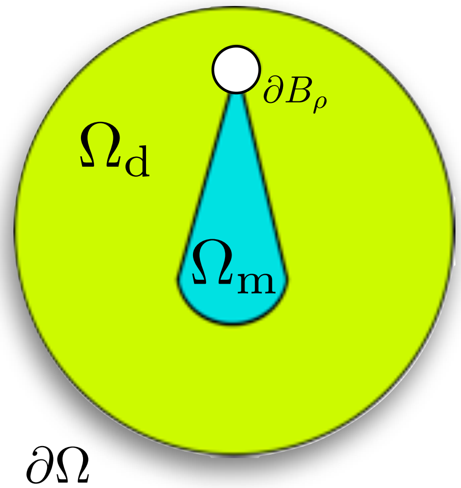
$$-|c|^2\eta \underbrace{\int_0^{2\pi} \varepsilon^{-1}|\phi(\theta)|^2\, d\theta}_{\neq 0} = \Im m\,(\omega^2) \int_\Omega \underbrace{\mu|u|^2\, d\mathbf{x}}_{\geq 0}.$$

$\omega^2 \in \mathbb{R}$ Les valeurs propres réelles n'excitent pas l'onde de trou noir ($u = u_A \in D(A)$)

$\omega^2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ Les valeurs propres complexes excitent la singularité et sont toutes situées dans le même demi-plan complexe.

Tri des valeurs propres par flux d'énergie

Avec l'extension choisie nous avons : $\forall u \in D(\mathcal{A})$, $\boxed{u = u_A + cs^-}$, $u_A \in D(A)$



$$s^-(r,\theta) := \chi(r)(e^{-i\eta \ln r}\phi(\theta)) \notin D(A) \quad \eta > 0$$

$$-\mathrm{div}\,(\varepsilon^{-1}\nabla u) + \beta^2\varepsilon^{-1}u = \omega^2 \mu u \qquad \Omega/B_\rho \qquad \boxed{\beta \in \mathbb{R}}$$

$$u = 0$$

Par la formule de Green, nous avor

$$\lim_{\rho\to 0} \Im m \left(\int_{\partial B_\rho} \varepsilon^{-1}\partial_r u\, \overline{u}\, d\sigma \right) = \Im r$$

et la théorie de Kondratiev nous donne

$$-|c|^2\eta \underbrace{\int_0^{2\pi} \varepsilon^{-1}|\phi(\theta)|^2\, d\theta}_{\neq 0} = \Im$$

$\kappa_\varepsilon < -1$	$\kappa_\varepsilon > -1$
> 0	< 0

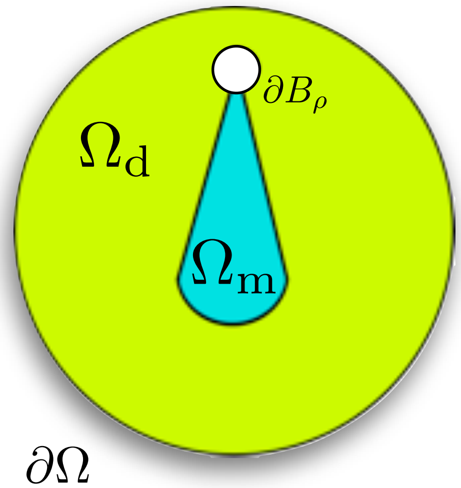
≥ 0

$\omega^2 \in \mathbb{R}$ Les valeurs propres réelles n'excitent pas l'onde de trou noir ($u = u_A \in D(A)$)

$\omega^2 \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ Les valeurs propres complexes excitent la singularité et sont toutes situées dans le même demi-plan complexe.

Tri des valeurs propres par flux d'énergie

Avec l'extension choisie nous avons : $\forall u \in D(\mathcal{A})$, $\boxed{u = u_A + cs^-}$, $\quad u_A \in D(A)$



$$s^-(r,\theta) := \chi(r)(e^{-i\eta \ln r}\phi(\theta)) \notin D(A) \quad \eta > 0$$

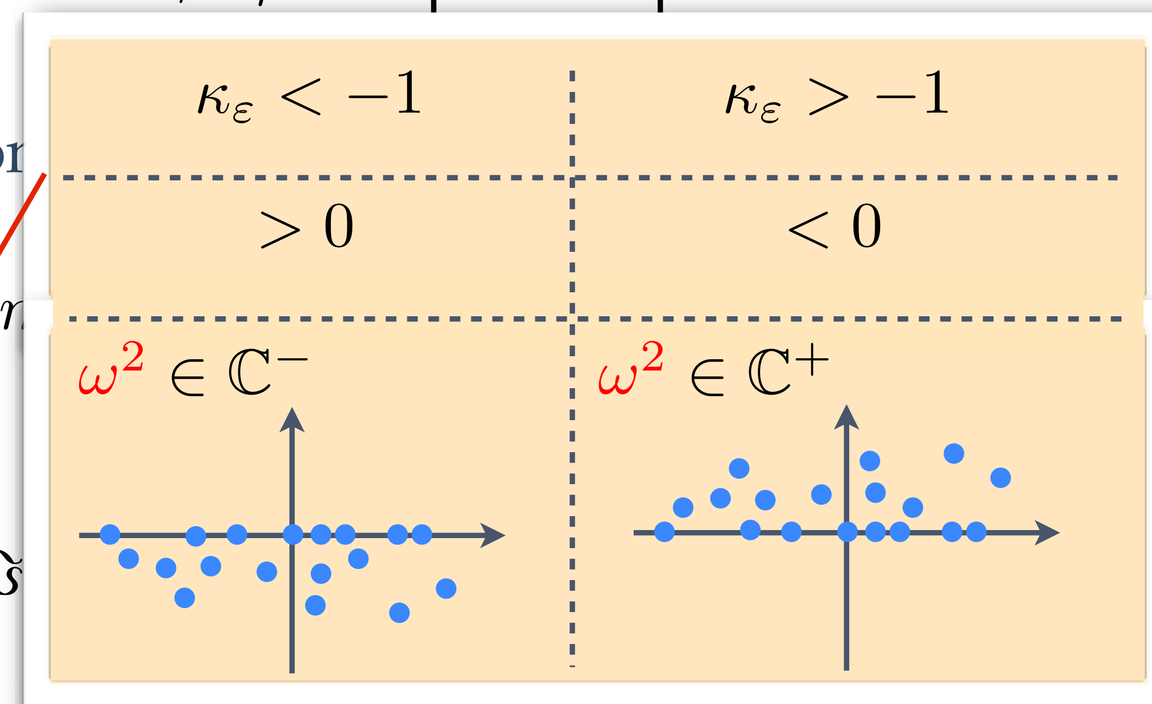
$$-\mathrm{div}\,(\varepsilon^{-1}\nabla u) + \beta^2\varepsilon^{-1}u = \omega^2\mu u \qquad \Omega/B_\rho \qquad \boxed{\beta \in \mathbb{R}}$$
$$u = 0$$

Par la formule de Green, nous avon

$$\lim_{\rho\to 0} \Im m\left(\int_{\partial B_\rho} \varepsilon^{-1}\partial_r u\,\overline{u}\,d\sigma\right) = \Im m$$

et la théorie de Kondratiev nous donne

$$-|c|^2\eta \underbrace{\int_0^{2\pi} \varepsilon^{-1}|\phi(\theta)|^2\,d\theta}_{\neq 0} = \Im$$



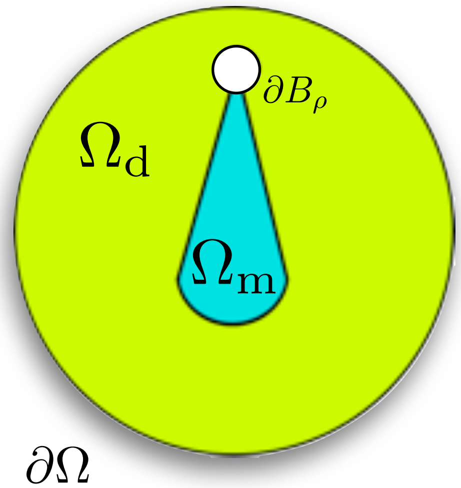
≥ 0

$\omega^2 \in \mathbb{R}$ Les valeurs propres réelles n'excitent pas l'onde de trou noir ($u = u_A \in D(A)$)

$\omega^2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ Les valeurs propres complexes excitent la singularité et sont toutes situées dans le même demi-plan complexe.

Tri des valeurs propres par flux d'énergie

Avec l'extension choisie nous avons : $\forall u \in D(\mathcal{A})$, $\boxed{u = u_A + cs^-}$, $u_A \in D(A)$



$$s^-(r,\theta) := \chi(r)(e^{-i\eta \ln r}\phi(\theta)) \notin D(A) \quad \eta > 0$$

$$-\mathrm{div}\,(\varepsilon^{-1}\nabla u) + \beta^2\varepsilon^{-1}u = \omega^2\mu u \qquad \Omega/B_\rho \qquad \boxed{\beta \in \mathbb{R}}$$

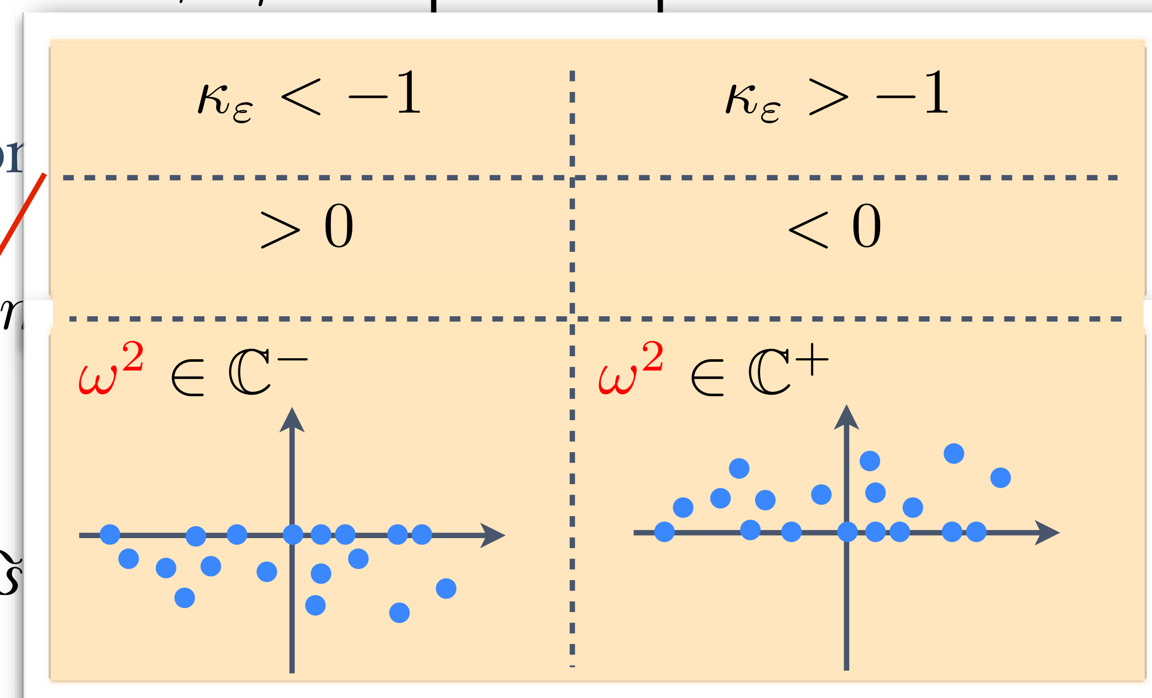
$$u = 0$$

Par la formule de Green, nous avon

$$\lim_{\rho\to 0} \Im m \left(\int_{\partial B_\rho} \varepsilon^{-1}\partial_r u\,\overline{u}\,d\sigma \right) = \Im m$$

et la théorie de Kondratiev nous donne

$$-|c|^2\eta \underbrace{\int_0^{2\pi} \varepsilon^{-1}|\phi(\theta)|^2\,d\theta}_{\neq 0} = \Im$$



≥ 0

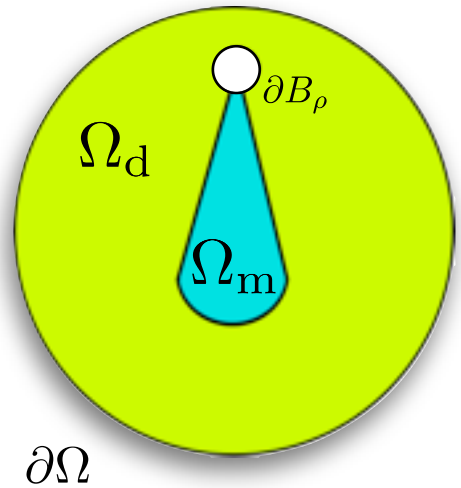
$\omega^2 \in \mathbb{R}$ Les valeurs propres réelles n'excitent pas l'onde de trou noir ($u = u_A \in D(A)$)

$\omega^2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ Les valeurs propres complexes excitent la singularité et sont toutes situées dans le même demi-plan complexe.

L'avantage de l'extension non auto-adjointe est qu'on peut distinguer les modes singuliers des autres.

Tri des valeurs propres par flux d'énergie

Avec l'extension choisie nous avons : $\forall u \in D(\mathcal{A})$, $\boxed{u = u_A + cs^-}$, $\quad u_A \in D(A)$



$$s^-(r,\theta) := \chi(r)(e^{-i\eta \ln r}\phi(\theta)) \notin D(A) \quad \eta > 0$$

$$-\mathrm{div}\,(\varepsilon^{-1}\nabla u) + \beta^2\varepsilon^{-1}u = \omega^2\mu u \qquad \Omega/B_\rho \qquad \boxed{\beta \in \mathbb{R}}$$

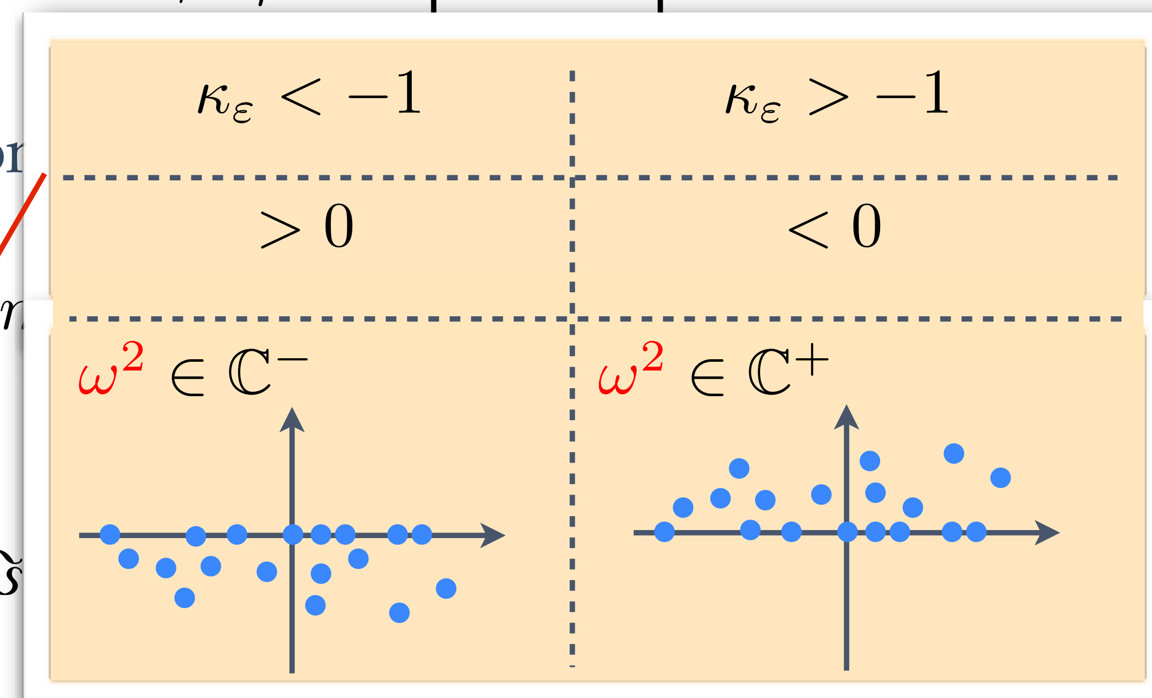
$$u = 0$$

Par la formule de Green, nous avon

$$\lim_{\rho\to 0} \Im m \left(\int_{\partial B_\rho} \varepsilon^{-1}\partial_r u\, \overline{u}\, d\sigma \right) = \Im$$

et la théorie de Kondratiev nous donne

$$-|c|^2\eta \underbrace{\int_0^{2\pi} \varepsilon^{-1}|\phi(\theta)|^2\, d\theta}_{\neq 0} = \Im$$



≥ 0

$\omega^2 \in \mathbb{R}$ Les valeurs propres réelles n'excitent pas l'onde de trou noir ($u = u_A \in D(A)$)

$\omega^2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ Les valeurs propres complexes excitent la singularité et sont toutes situées dans le même demi-plan complexe.

Comment les calculer numériquement ? Pour capturer s^- on utilise à notre avantage le changement de variables en mettant des PMLs (Perfectly Matched Layers) pour borner le guide.

Les PMLs et implémentation

La PML permet de borner artificiellement le guide tout en rendant évanescent les modes propagatifs.

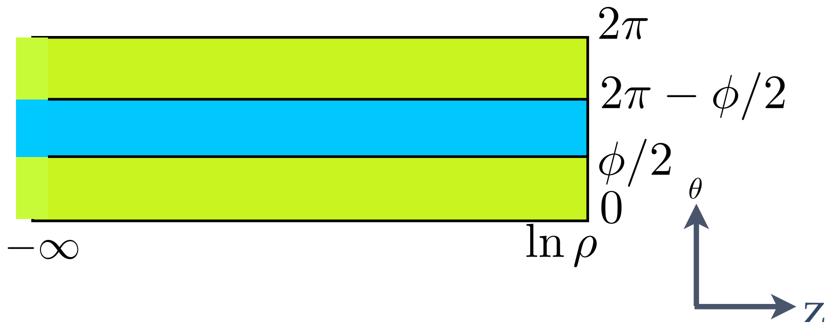
$$\frac{\partial}{\partial z} \longmapsto \alpha \frac{\partial}{\partial z} \qquad \alpha \in \mathbb{C}$$

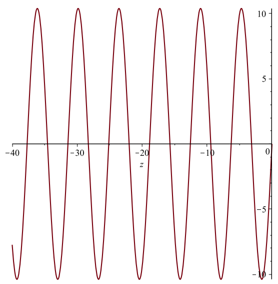
Les PMLs et implémentation

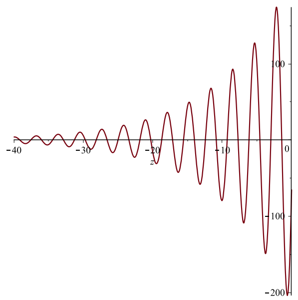
La PML permet de borner artificiellement le guide tout en rendant évanescent les modes propagatifs.

$$\frac{\partial}{\partial z} \longmapsto \alpha \frac{\partial}{\partial z} \qquad \alpha \in \mathbb{C}$$

$$u(z,\theta) = e^{\lambda z}\phi(\theta) \longrightarrow u(z,\theta) = e^{\frac{\lambda}{\alpha} z}\phi(\theta)$$





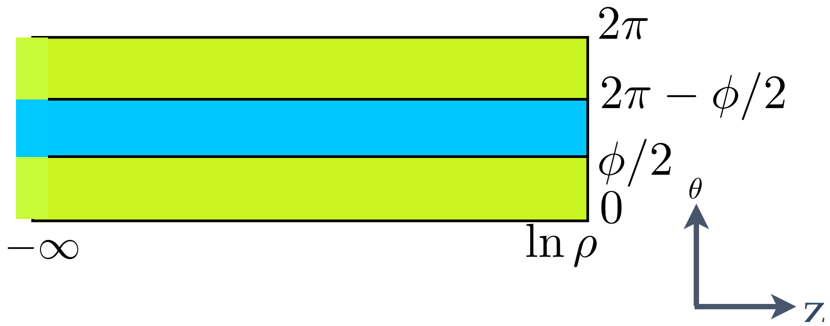


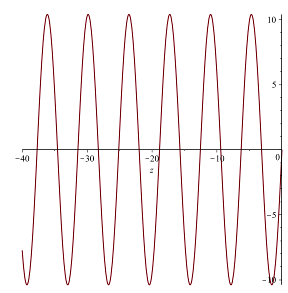
Les PMLs et implémentation

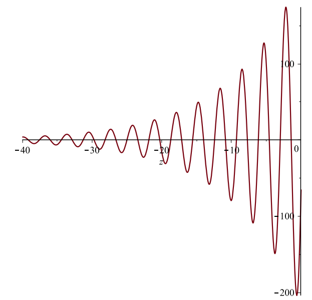
La PML permet de borner artificiellement le guide tout en rendant évanescent les modes propagatifs.

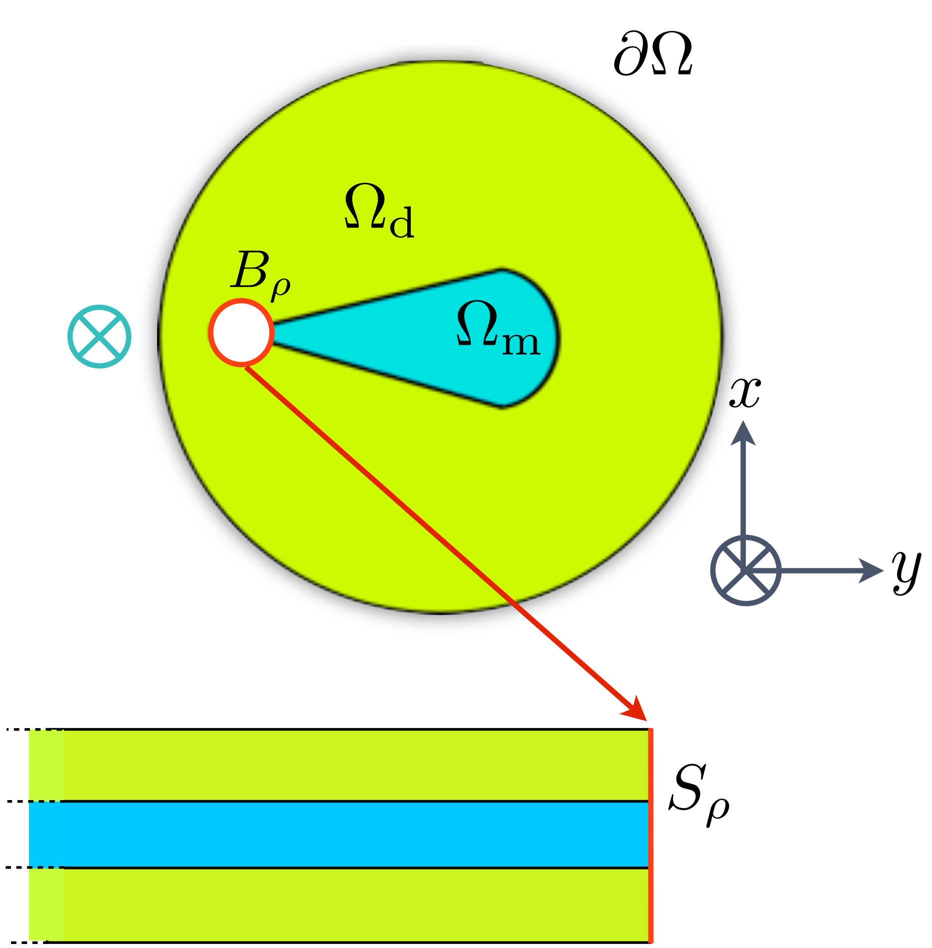
$$\frac{\partial}{\partial z} \longmapsto \alpha \frac{\partial}{\partial z} \qquad \alpha \in \mathbb{C}$$

$$u(z,\theta) = e^{\lambda z}\phi(\theta) \longrightarrow u(z,\theta) = e^{\frac{\lambda}{\alpha} z}\phi(\theta)$$







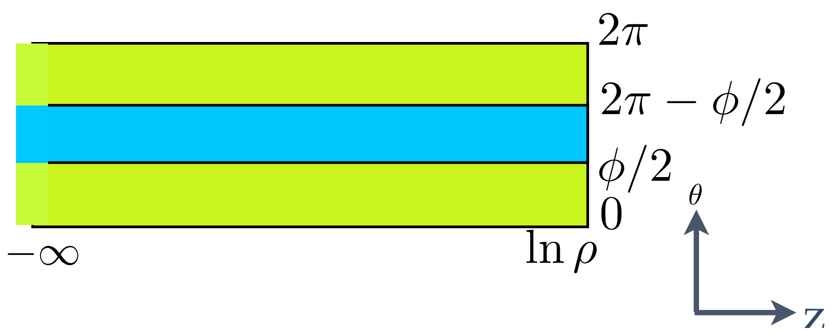


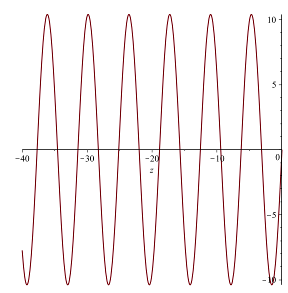
Les PMLs et implémentation

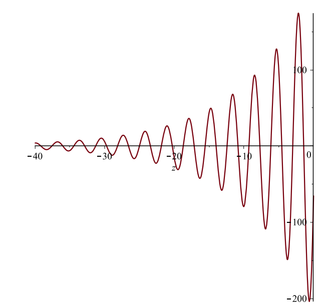
La PML permet de borner artificiellement le guide tout en rendant évanescent les modes propagatifs.

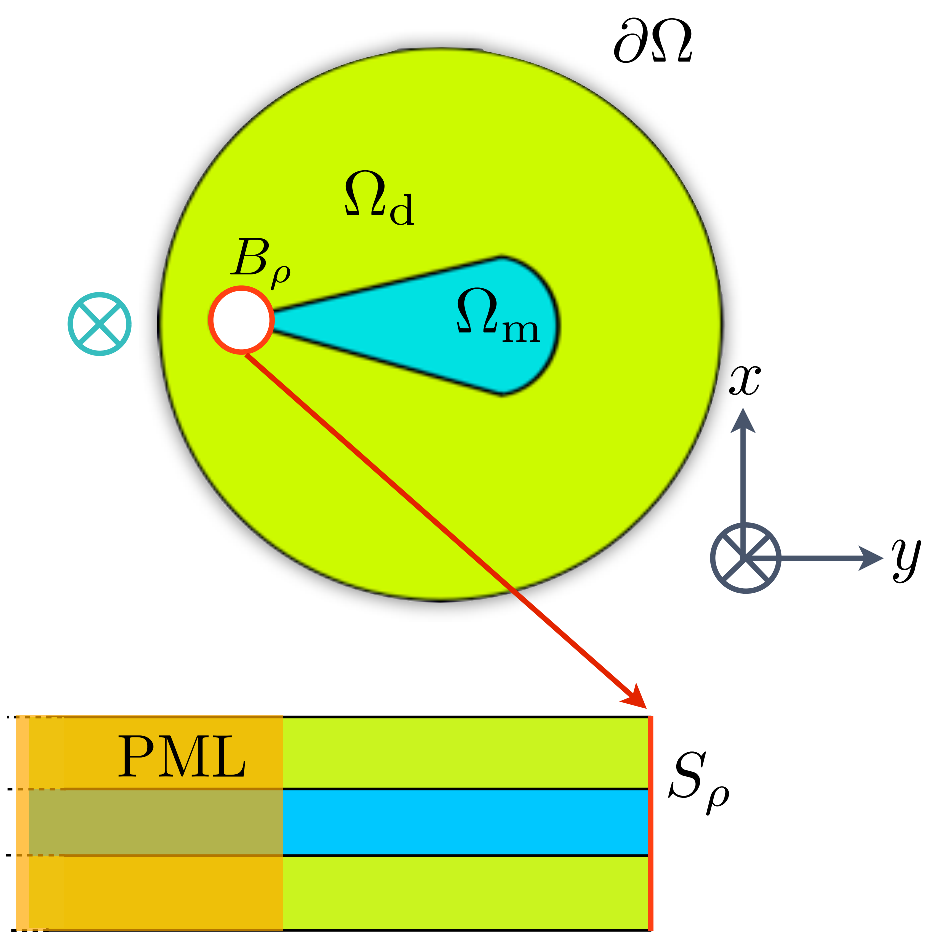
$$\frac{\partial}{\partial z} \longmapsto \alpha \frac{\partial}{\partial z} \qquad \alpha \in \mathbb{C}$$

$$u(z,\theta) = e^{\lambda z}\phi(\theta) \longrightarrow u(z,\theta) = e^{\frac{\lambda}{\alpha} z}\phi(\theta)$$









$$-\mathrm{div}\left(\varepsilon^{-1}\nabla u\right) + \beta^2 \varepsilon^{-1} u = \omega^2 \mu u \quad \Omega \setminus \overline{B_\rho}$$

$$u = 0 \quad \partial\Omega$$

+ raccord avec le guide et la PML +

$$-\alpha\varepsilon^{-1}\partial_{zz}u - \frac{1}{\alpha}\partial_\theta \varepsilon^{-1}\partial_\theta u + \frac{\beta^2}{\alpha}\varepsilon^{-1}e^{\frac{2z}{\alpha}}u = \frac{\omega^2}{\alpha}\mu e^{\frac{2z}{\alpha}}u \quad S_\rho$$

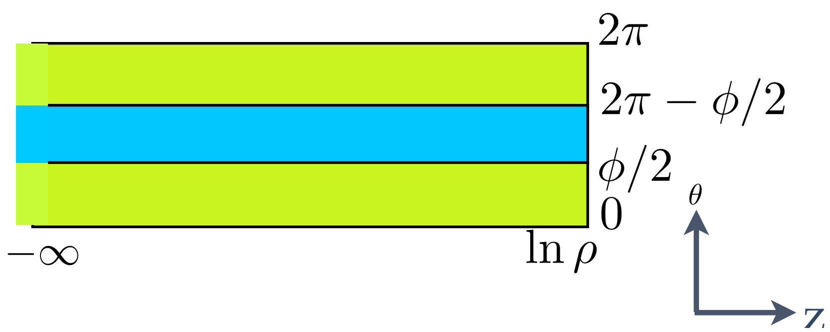
+ conditions périodiques

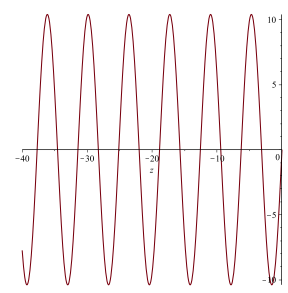
Les PMLs et implémentation

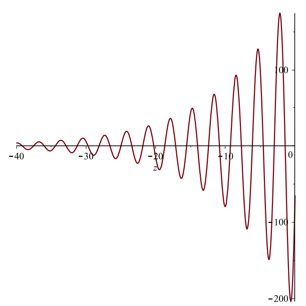
La PML permet de borner artificiellement le guide tout en rendant évanescent les modes propagatifs.

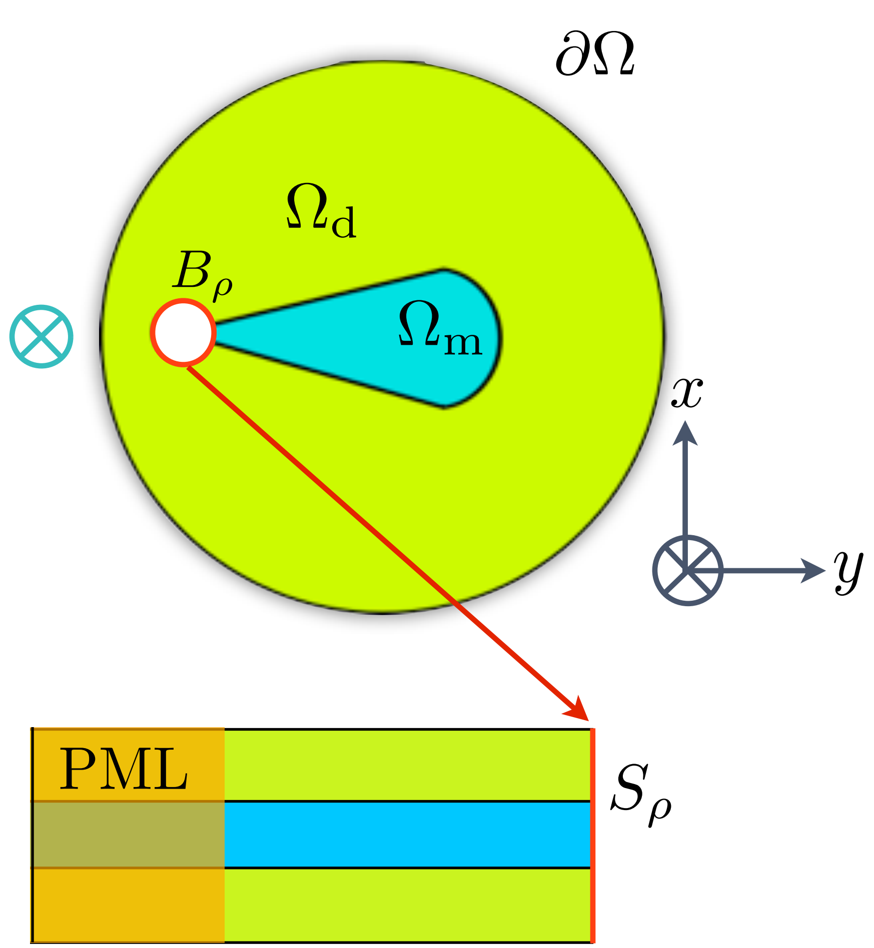
$$\frac{\partial}{\partial z} \longmapsto \alpha \frac{\partial}{\partial z} \qquad \alpha \in \mathbb{C}$$

$$u(z,\theta) = e^{\lambda z}\phi(\theta) \longrightarrow u(z,\theta) = e^{\frac{\lambda}{\alpha} z}\phi(\theta)$$









$$-\mathrm{div}\left(\varepsilon^{-1}\nabla u\right) + \beta^2\varepsilon^{-1}u = \omega^2\mu u \quad \Omega \setminus \overline{B_\rho}$$

$$u = 0 \quad \partial\Omega$$

+ raccord avec le guide et la PML +

$$-\alpha\varepsilon^{-1}\partial_{zz}u - \frac{1}{\alpha}\partial_\theta\varepsilon^{-1}\partial_\theta u + \frac{\beta^2}{\alpha}\varepsilon^{-1}e^{\frac{2z}{\alpha}}u = \frac{\omega^2}{\alpha}\mu e^{\frac{2z}{\alpha}}u \quad S_\rho$$

$$\partial_z u(-L,\cdot) = 0$$

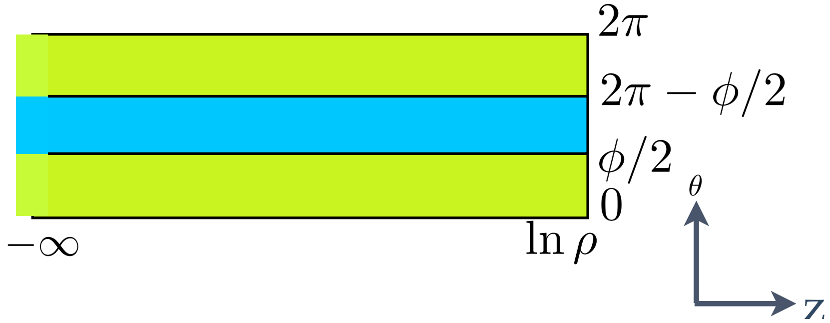
+ conditions périodiques

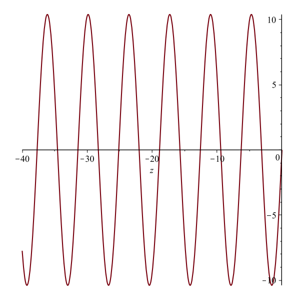
Les PMLs et implémentation

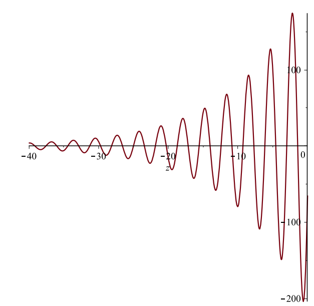
La PML permet de borner artificiellement le guide tout en rendant évanescent les modes propagatifs.

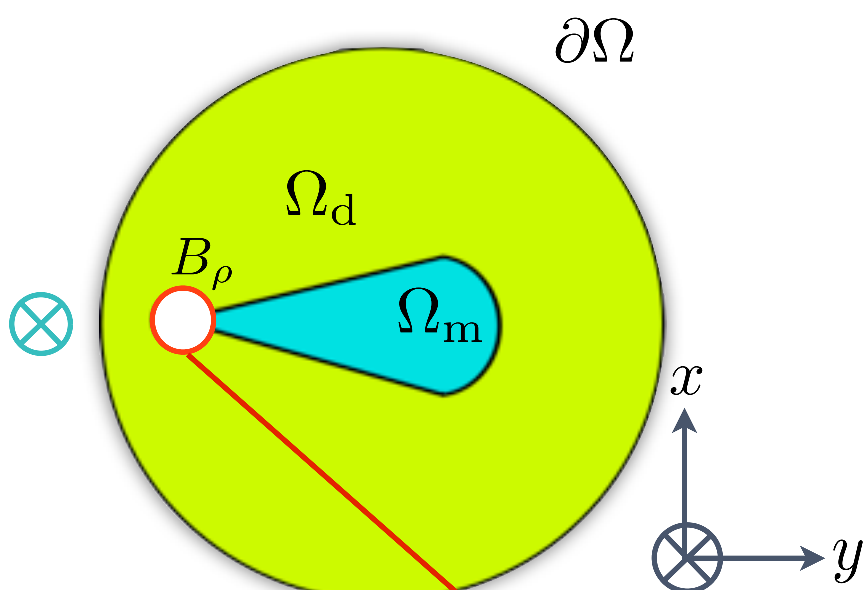
$$\frac{\partial}{\partial z} \longmapsto \alpha \frac{\partial}{\partial z} \qquad \alpha \in \mathbb{C}$$

$$u(z,\theta) = e^{\lambda z}\phi(\theta) \longrightarrow u(z,\theta) = e^{\frac{\lambda}{\alpha} z}\phi(\theta)$$









$$-\mathrm{div}\left(\varepsilon^{-1}\nabla u\right) + \beta^2\varepsilon^{-1}u = \omega^2\mu u \quad \Omega \setminus \overline{B_\rho}$$

$$u = 0 \quad \partial\Omega$$

+ raccord avec le guide et la PML +

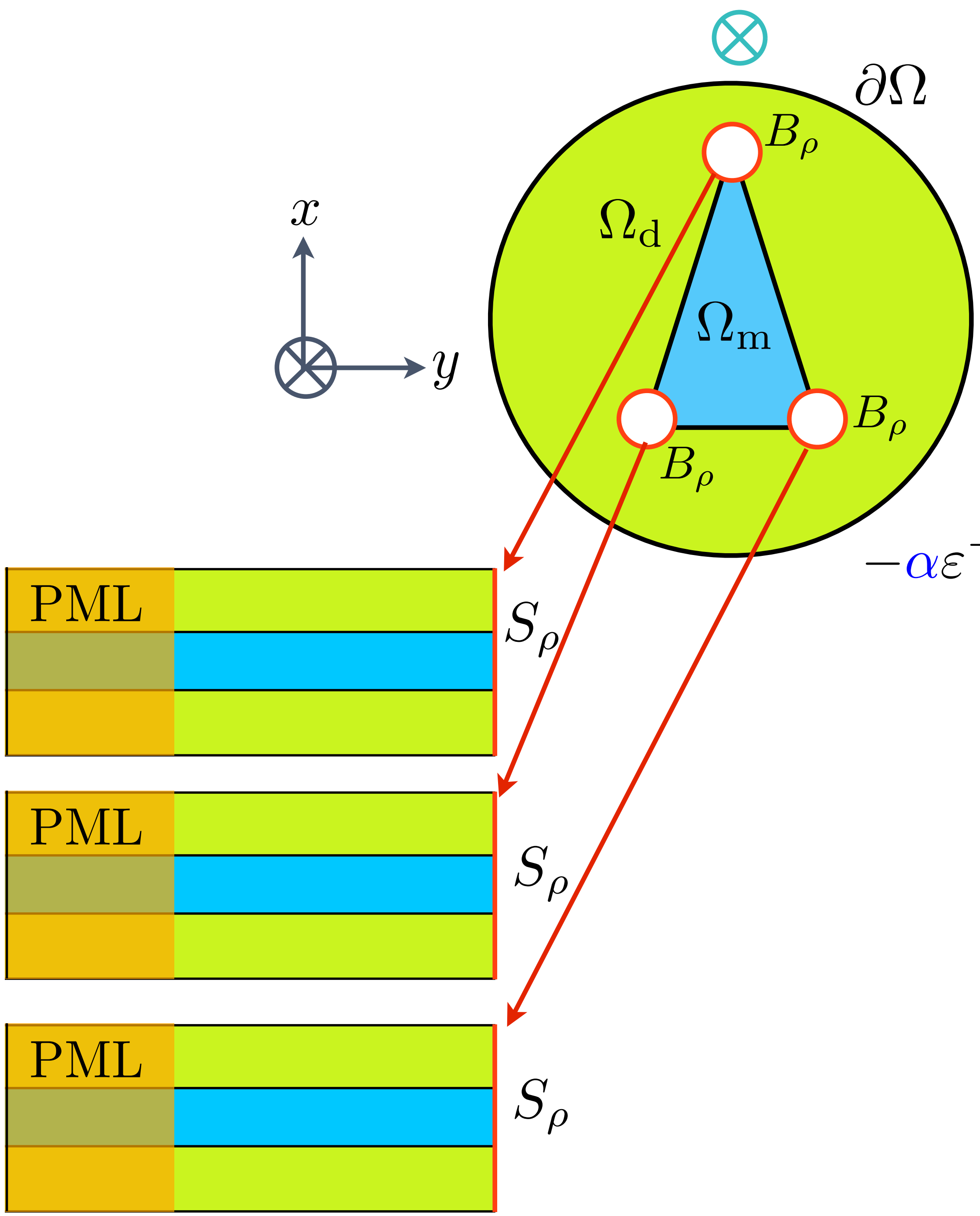
$$-\alpha\varepsilon^{-1}\partial_{zz}u - \frac{1}{\alpha}\partial_\theta\varepsilon^{-1}\partial_\theta u + \frac{\beta^2}{\alpha}\varepsilon^{-1}e^{\frac{2z}{\alpha}}u = \frac{\omega^2}{\alpha}\mu e^{\frac{2z}{\alpha}}u \quad S_\rho$$

$$\boxed{\partial_z u(-L,\cdot) = 0}$$

+ conditions périodiques

Condition de Neumann à cause du mode constant

Cas de plusieurs coins



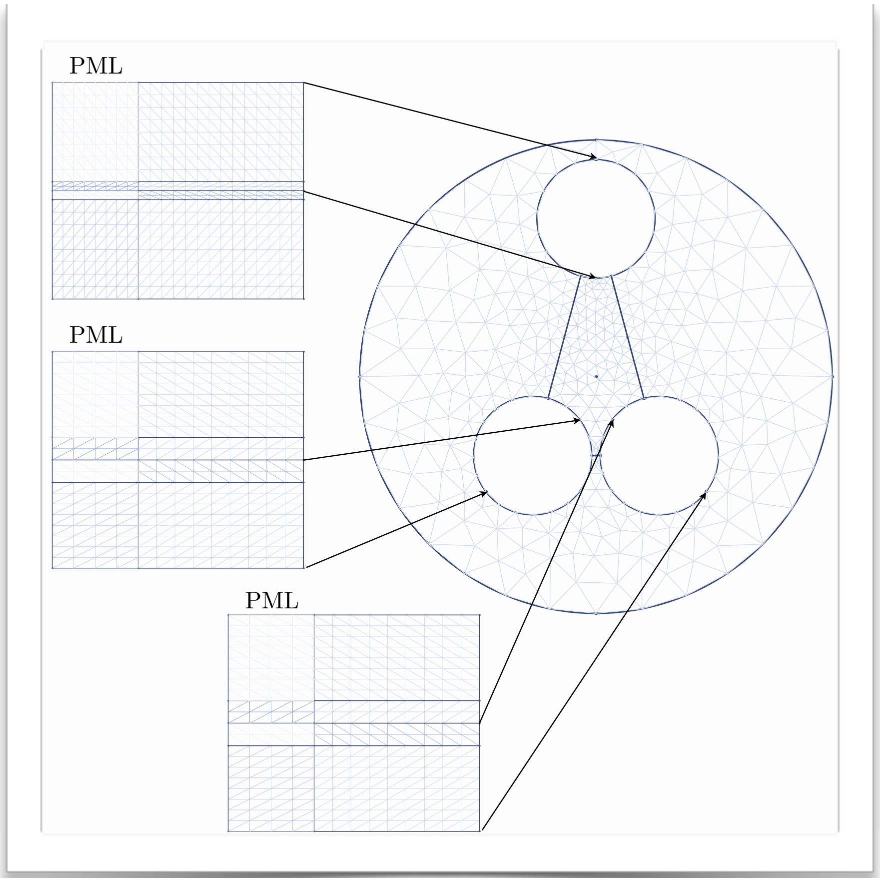
$$-\mathrm{div}\left(\varepsilon^{-1}\nabla u\right) + \beta^2\varepsilon^{-1}u = \omega^2\mu u \quad \Omega\setminus\cup\overline{B_\rho}$$
$$u = 0 \quad \partial\Omega$$

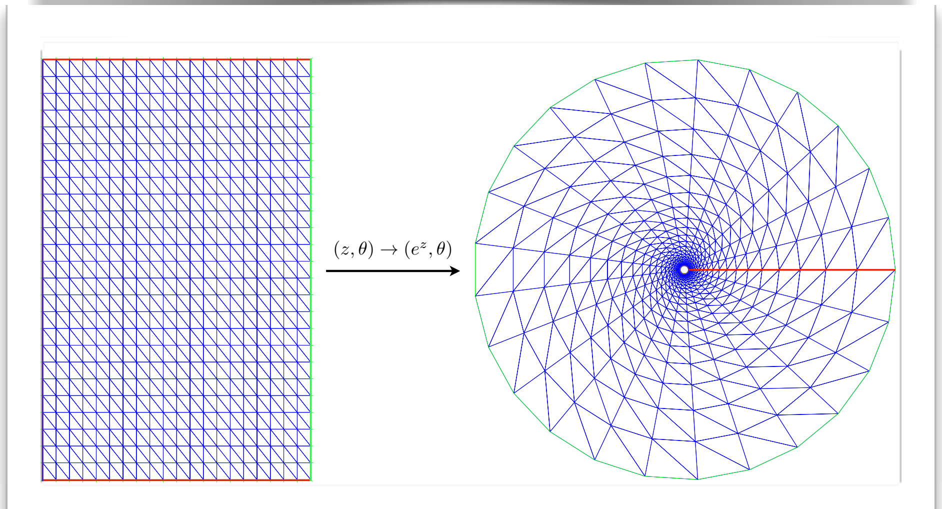
+ raccord avec le guide et la PML +

$$-\alpha\varepsilon^{-1}\partial_{zz}u - \frac{1}{\alpha}\partial_\theta\varepsilon^{-1}\partial_\theta u + \frac{\beta^2}{\alpha}\varepsilon^{-1}e^{\frac{2z}{\alpha}}u = \frac{\omega^2}{\alpha}\mu e^{\frac{2z}{\alpha}}u \quad S_\rho$$
$$\partial_z u(-L,\cdot) = 0$$

+ conditions périodiques

Cas de plusieurs coins





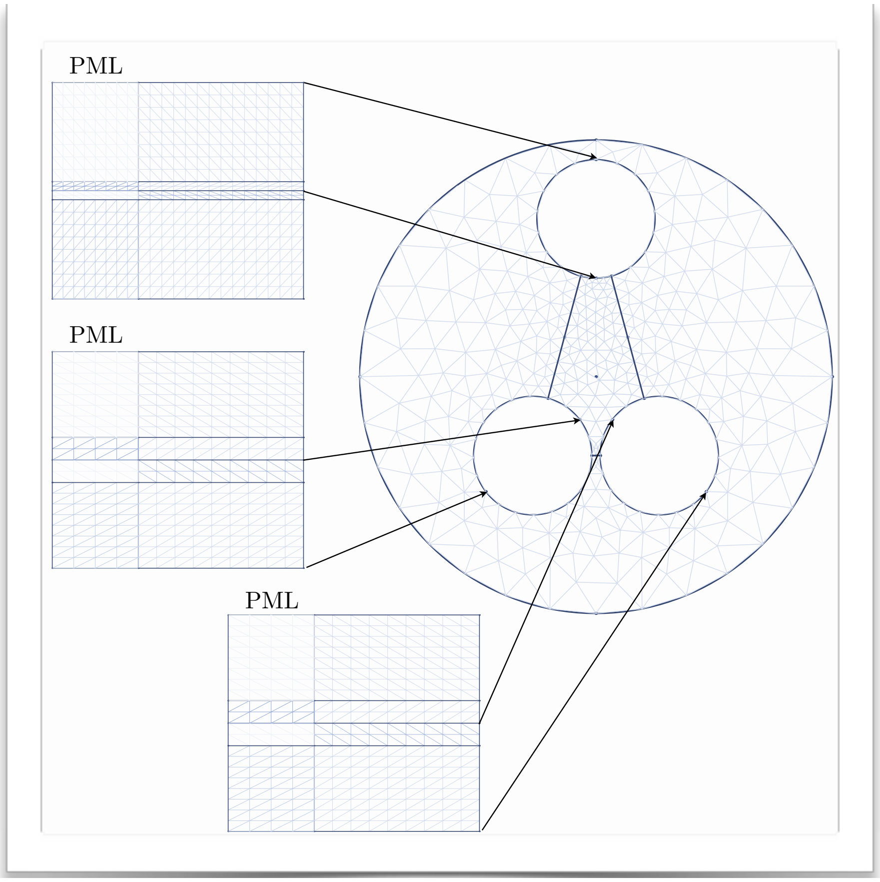
$$-\mathrm{div}\left(\varepsilon^{-1}\nabla u\right) + \beta^2\varepsilon^{-1}u = \omega^2\mu u \quad \Omega \setminus \cup\overline{B_\rho}$$
$$u = 0 \quad \partial\Omega$$

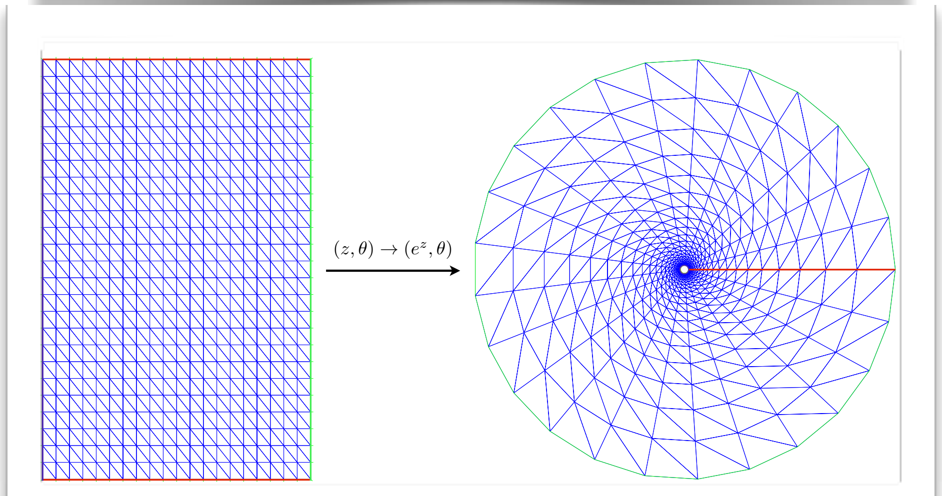
+ raccord avec le guide et la PML +

$$-\alpha\varepsilon^{-1}\partial_{zz}u - \frac{1}{\alpha}\partial_\theta\varepsilon^{-1}\partial_\theta u + \frac{\beta^2}{\alpha}\varepsilon^{-1}e^{\frac{2z}{\alpha}}u = \frac{\omega^2}{\alpha}\mu e^{\frac{2z}{\alpha}}u \quad S_\rho$$
$$\partial_z u(-L,\cdot) = 0$$

+ conditions périodiques

Cas de plusieurs coins





$$-\mathrm{div}\left(\varepsilon^{-1}\nabla u\right) + \beta^2\varepsilon^{-1}u = \omega^2\mu u \quad \Omega\setminus\cup\overline{B_\rho}$$
$$u = 0 \quad \partial\Omega$$

+ raccord avec le guide et la PML +

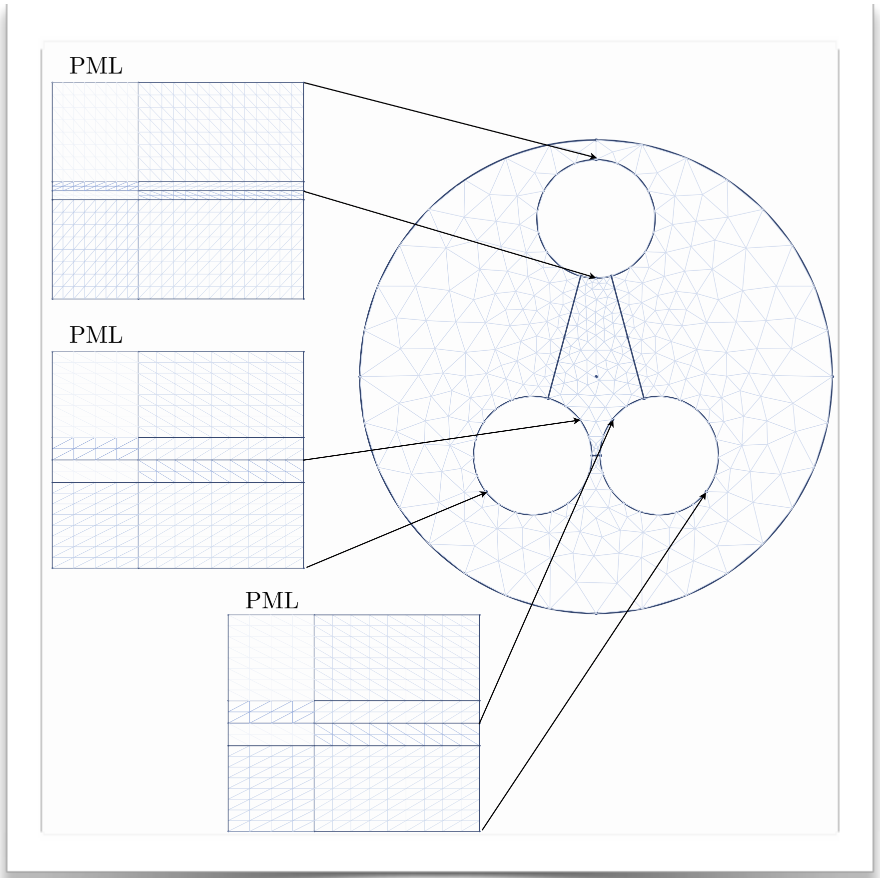
$$-\alpha\varepsilon^{-1}\partial_{zz}u - \frac{1}{\alpha}\partial_\theta\varepsilon^{-1}\partial_\theta u + \frac{\beta^2}{\alpha}\varepsilon^{-1}e^{\frac{2z}{\alpha}}u = \frac{\omega^2}{\alpha}\mu e^{\frac{2z}{\alpha}}u \quad S_\rho$$
$$\partial_z u(-L,\cdot) = 0$$

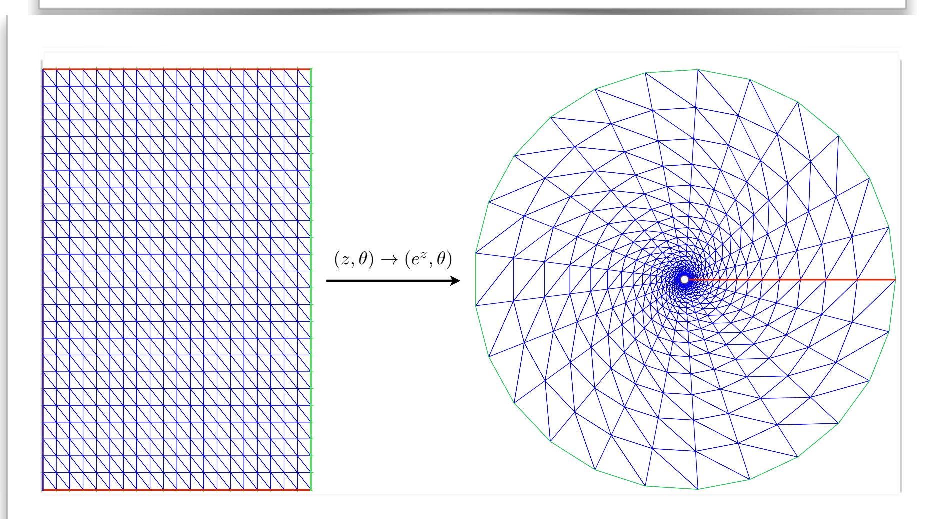
+ conditions périodiques

Principe inverse de la méthode des éléments finis inversés.

Boulmezaoud (2005).

Cas de plusieurs coins





$$-\mathrm{div}\left(\varepsilon^{-1}\nabla u\right) + \beta^2\varepsilon^{-1}u = \omega^2\mu u \quad \Omega \setminus \cup\overline{B_\rho}$$
$$u = 0 \quad \partial\Omega$$

+ raccord avec le guide et la PML +

$$-\alpha\varepsilon^{-1}\partial_{zz}u - \frac{1}{\alpha}\partial_\theta\varepsilon^{-1}\partial_\theta u + \frac{\beta^2}{\alpha}\varepsilon^{-1}e^{\frac{2z}{\alpha}}u = \frac{\omega^2}{\alpha}\mu e^{\frac{2z}{\alpha}}u \quad S_\rho$$
$$\partial_z u(-L,\cdot) = 0$$

+ conditions périodiques

Principe inverse de la méthode des éléments finis inversés.

Boulmezaoud (2005).

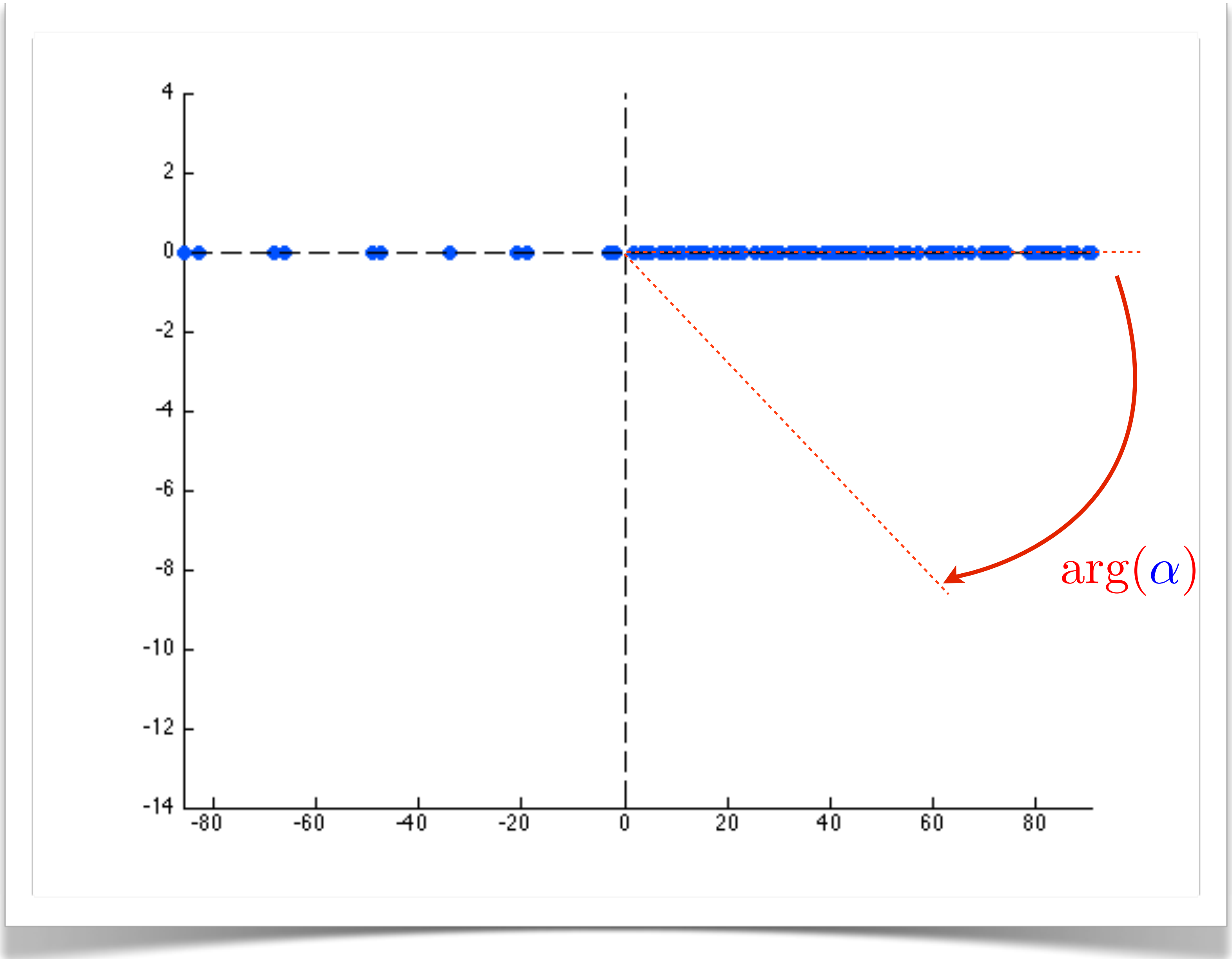
Résolution avec des Éléments Finis de Lagrange d'ordre 2 implémenté avec un code Matlab.

Illustrations numériques $\kappa_\varepsilon \in I_c$

Évolution du spectre en fonction du paramètre de PML

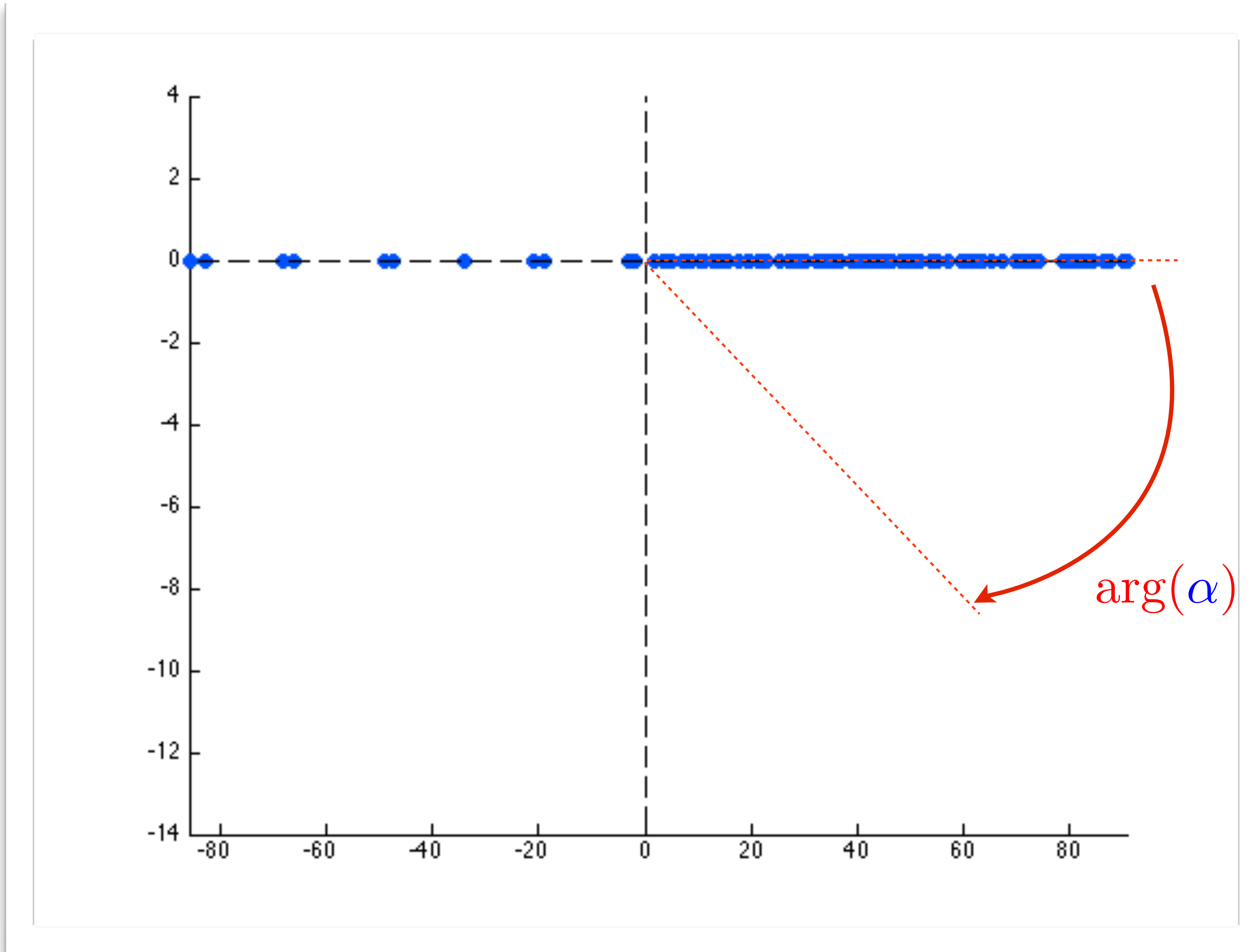
Illustrations numériques $\kappa_\varepsilon \in I_c$

Évolution du spectre en fonction du paramètre de PML



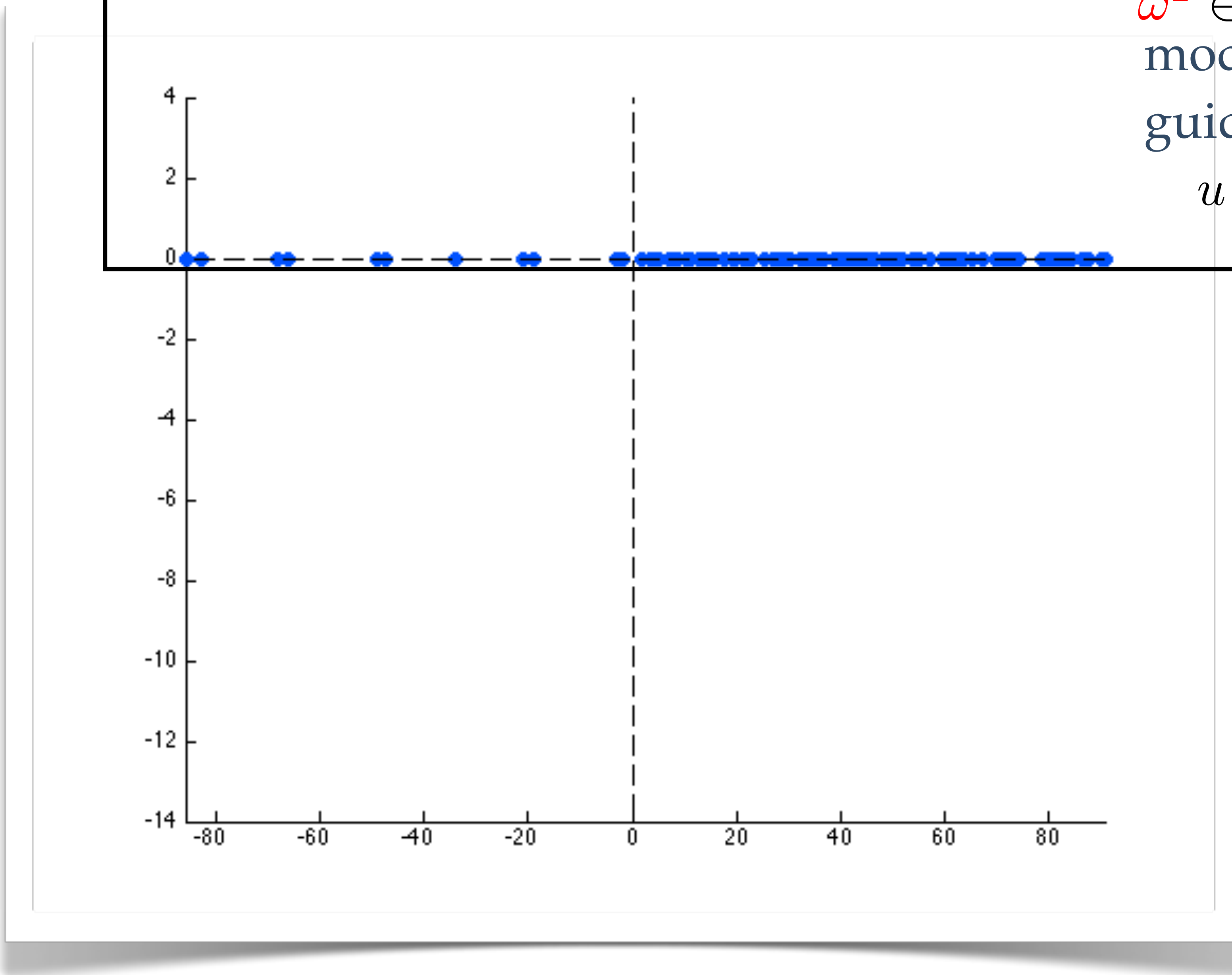
Illustrations numériques $\kappa_\varepsilon \in I_c$

Évolution du spectre en fonction du paramètre de PML



Illustrations numériques $\kappa_\varepsilon \in I_c$

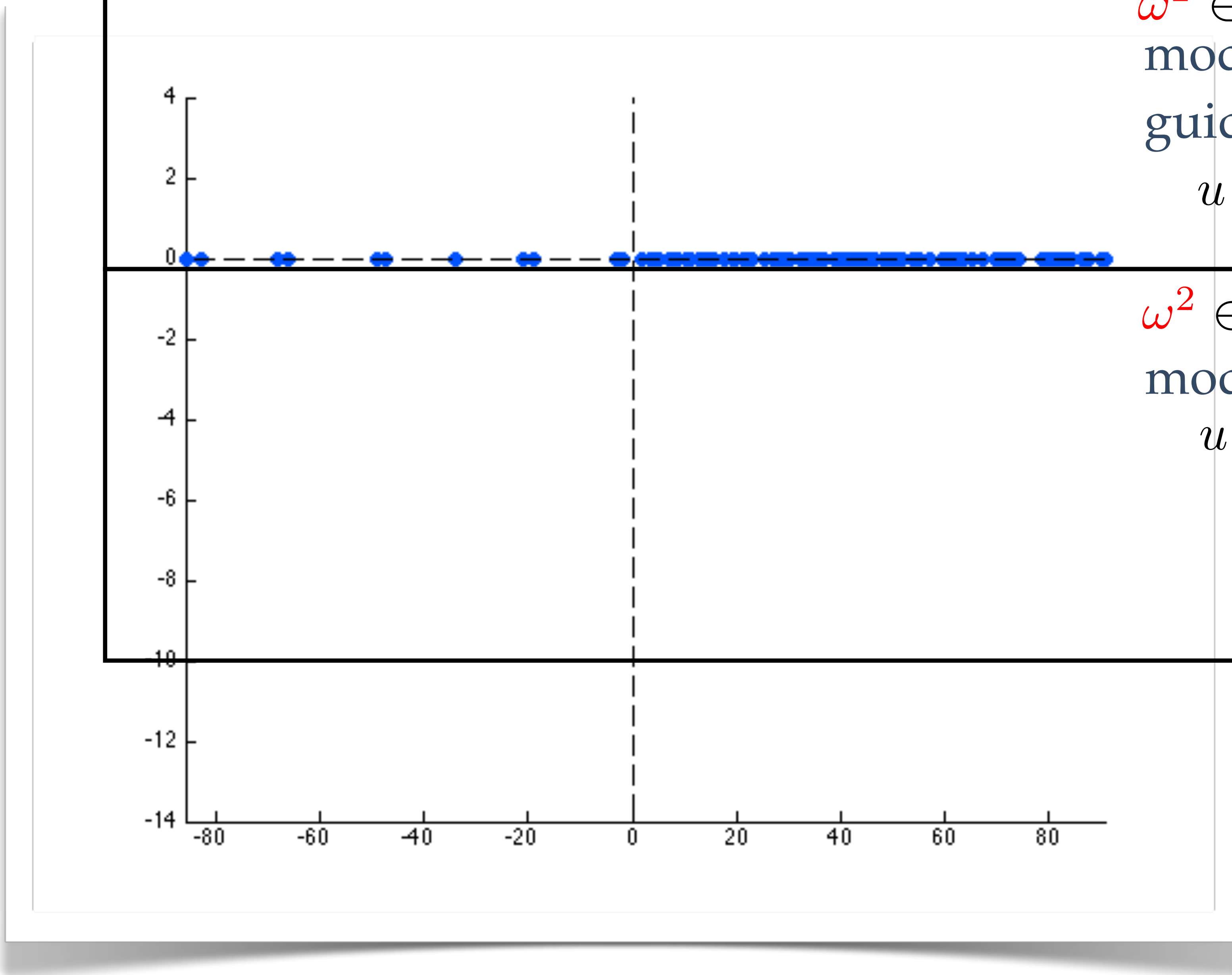
Évolution du spectre en fonction du paramètre de PML



$\omega^2 \in \mathbb{R}$
modes guidés/évanescents
$u = u_A \in D(A)$

Illustrations numériques $\kappa_\varepsilon \in I_c$

Évolution du spectre en fonction du paramètre de PML



$\omega^2 \in \mathbb{R}$

modes guidés/évanescents

$$u = u_A \in D(A)$$

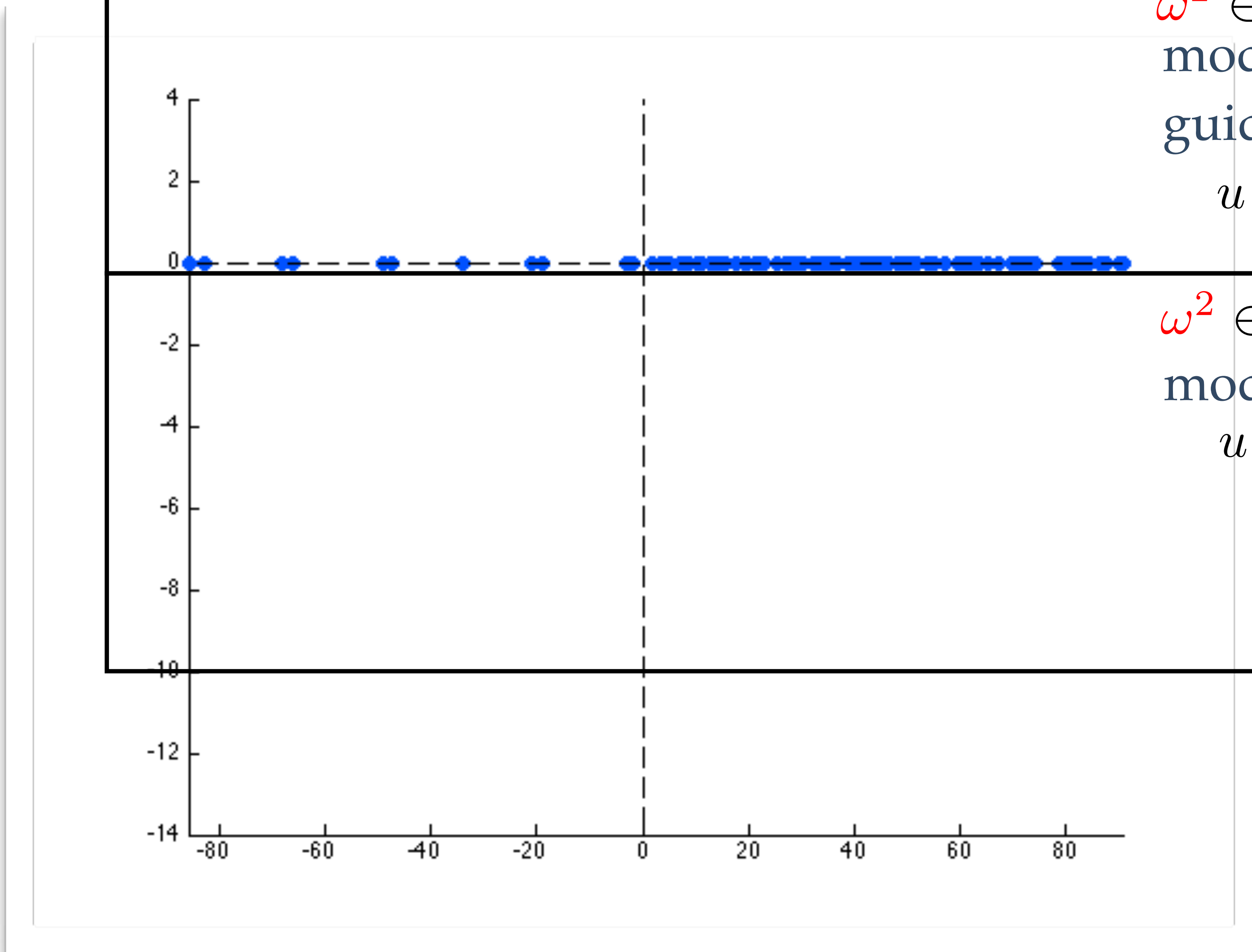
$\omega^2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

modes singuliers

$$u = u_A + cs^-$$

Illustrations numériques $\kappa_\varepsilon \in I_c$

Évolution du spectre en fonction du paramètre de PML



$\omega^2 \in \mathbb{R}$

modes intrinsèques guidés/évanescents

$$u = u_A \in D(A)$$

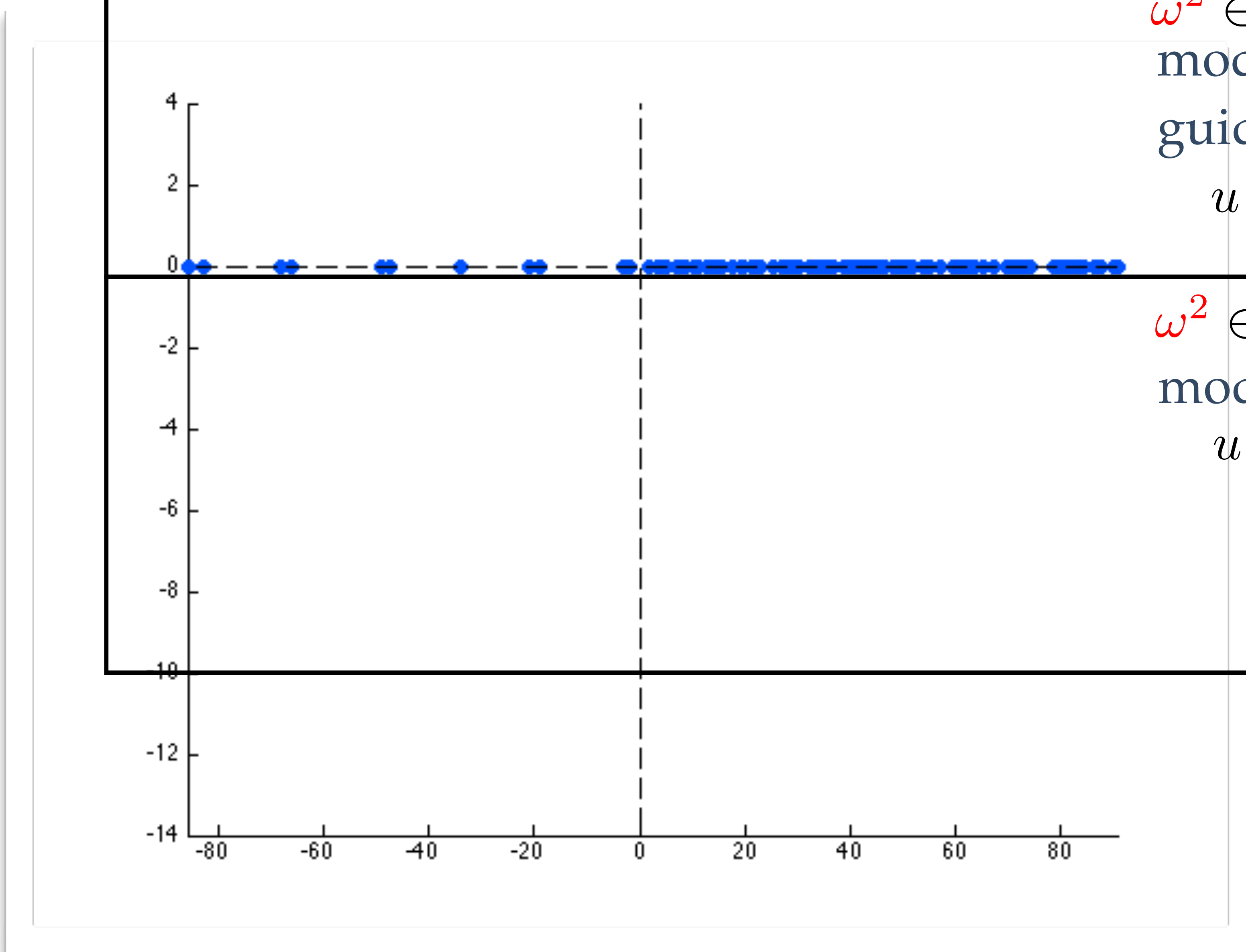
$\omega^2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

modes singuliers

$$u = u_A + cs^-$$

Illustrations numériques $\kappa_\varepsilon \in I_c$

Évolution du spectre en fonction du paramètre de PML



$\omega^2 \in \mathbb{R}$

modes intrinsèques guidés/évanescents

$u = u_A \in D(A)$

$\omega^2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

modes singuliers

$u = u_A + cs^-$

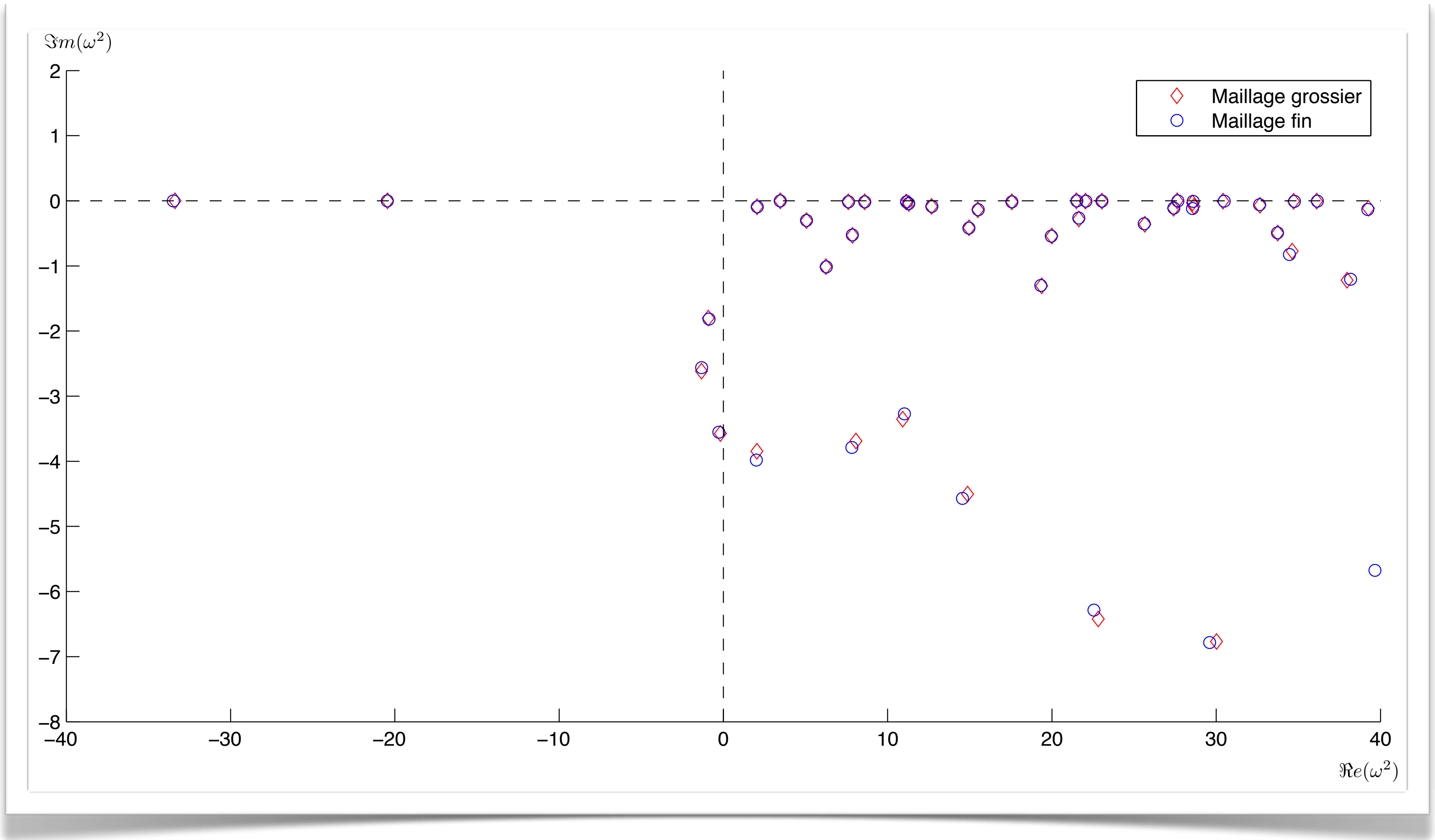
Paradoxe :

il faut prendre en compte $s^- \notin D(A)$pour calculer les modes réguliers $u_A \in D(A)$!

Illustrations numériques $\kappa_\varepsilon \in I_c$

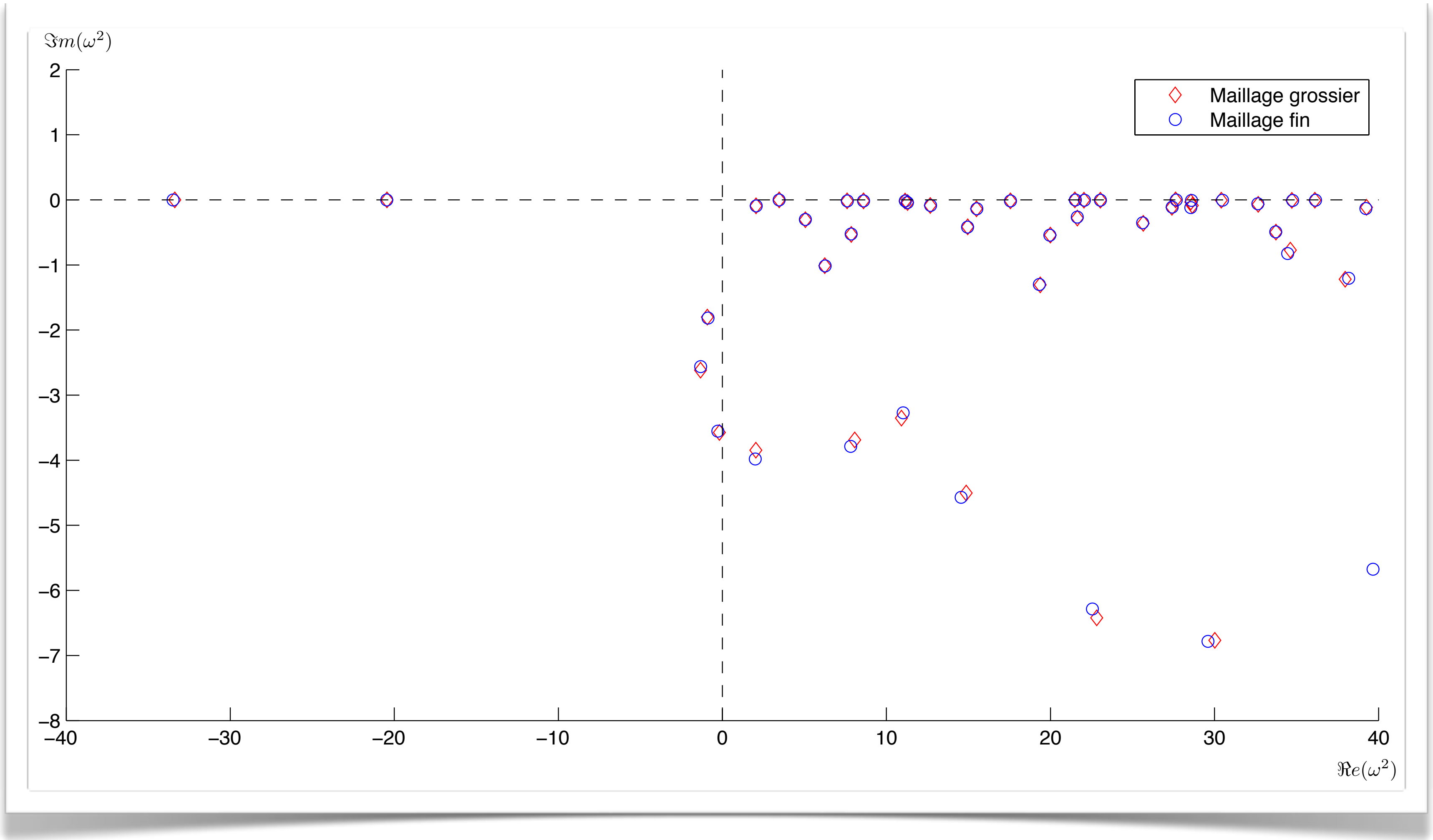
Illustrations numériques $\kappa_\varepsilon \in I_c$

Pour un paramètre de PML fixé, spectre obtenu pour deux maillages



Illustrations numériques $\kappa_\varepsilon \in I_c$

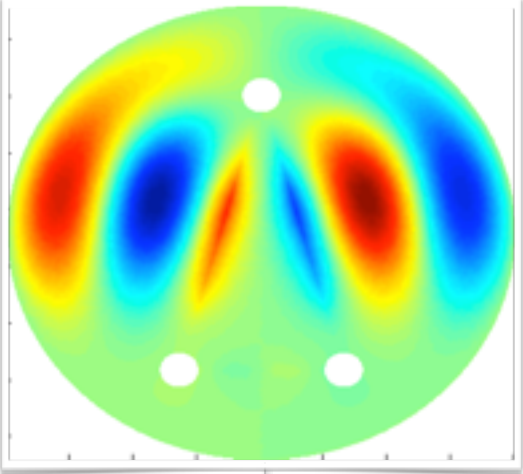
Animation en temps $e^{-i\,\omega_j(\beta)t}$

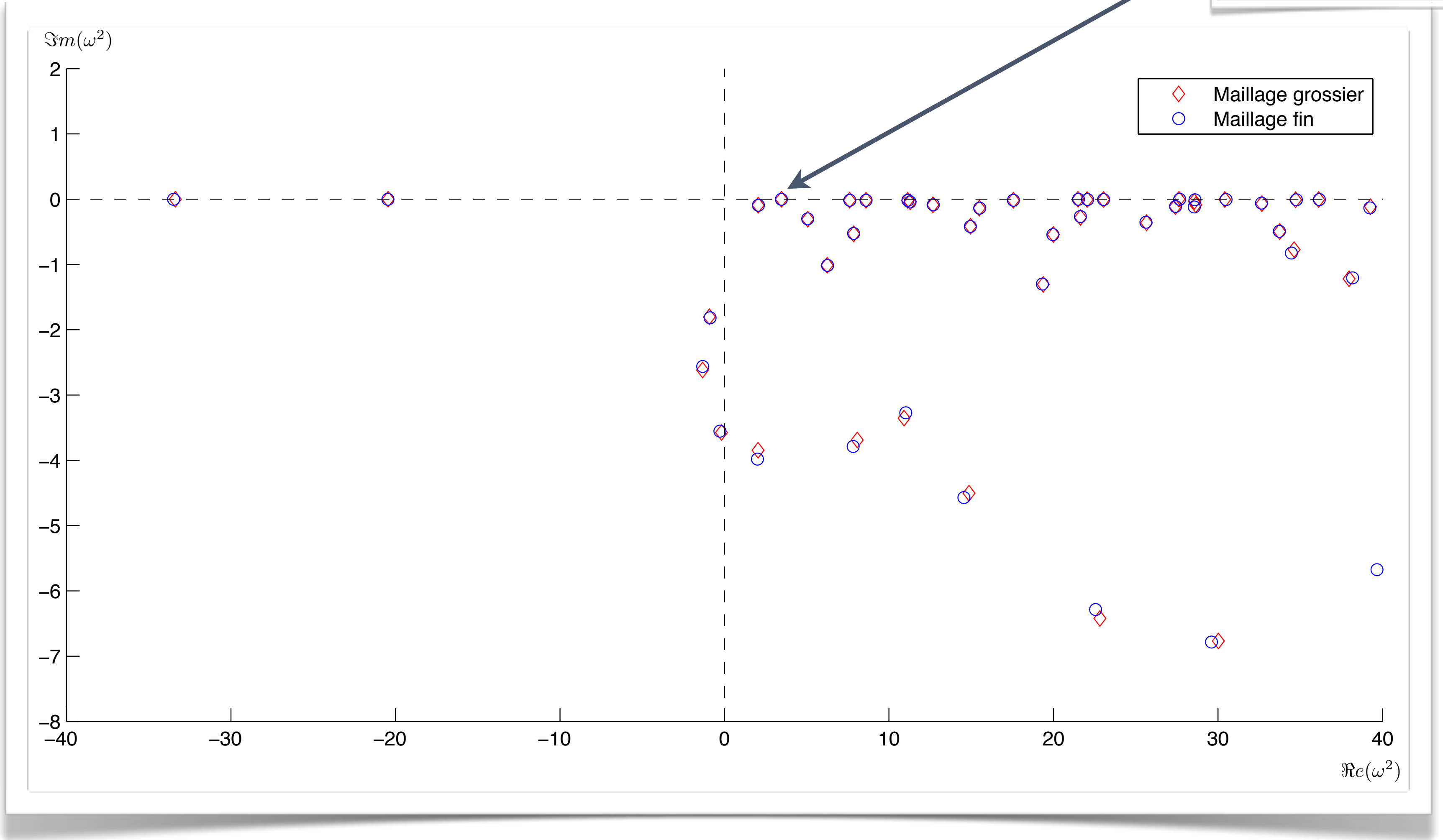


Illustrations numériques $\kappa_\varepsilon \in I_c$

Animation en temps $e^{-i\,\omega_j(\beta)t}$

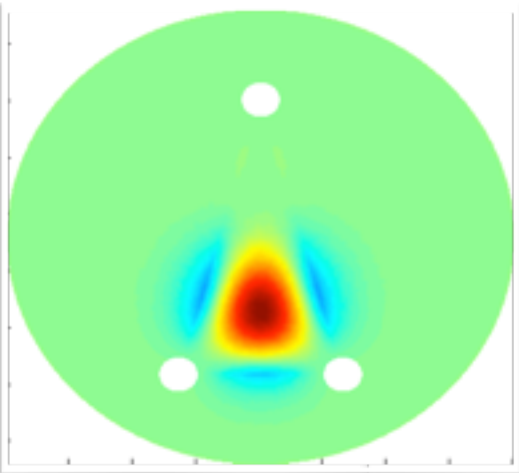
$\omega^2 \in \mathbb{R}^+$
Modes guidés





Illustrations numériques $\kappa_\varepsilon \in I_c$

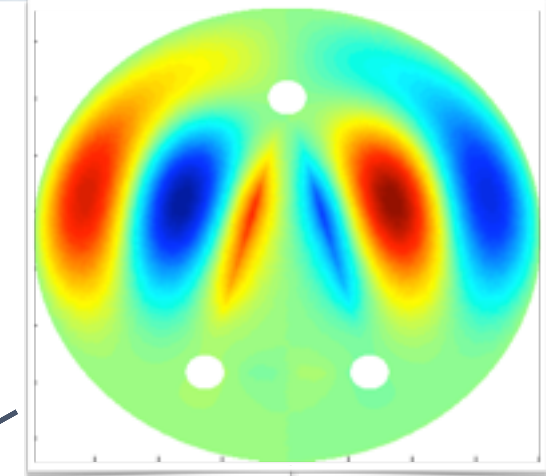
Animation en temps $e^{-i\,\omega_j(\beta)t}$

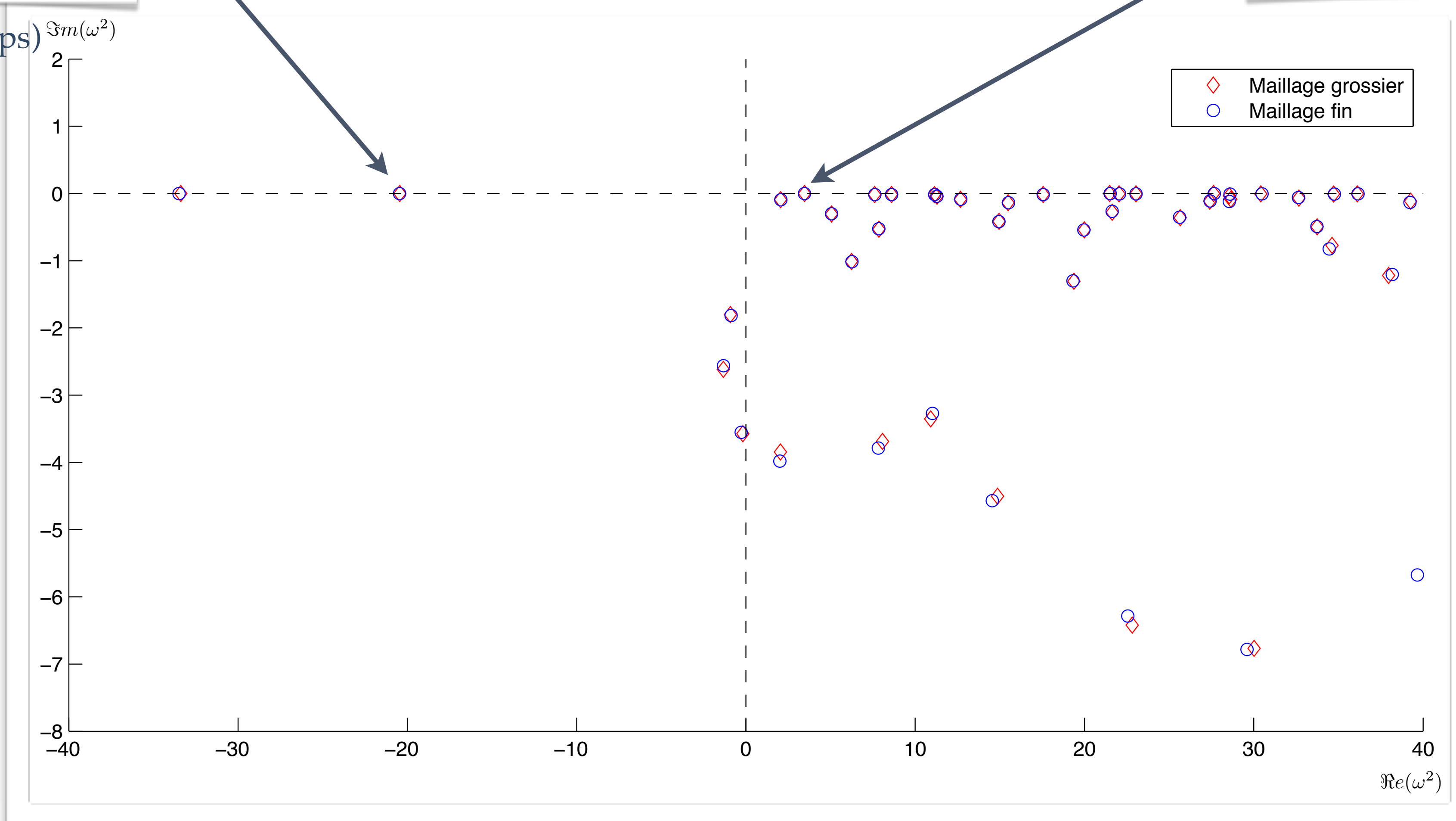


(boucle en temps)

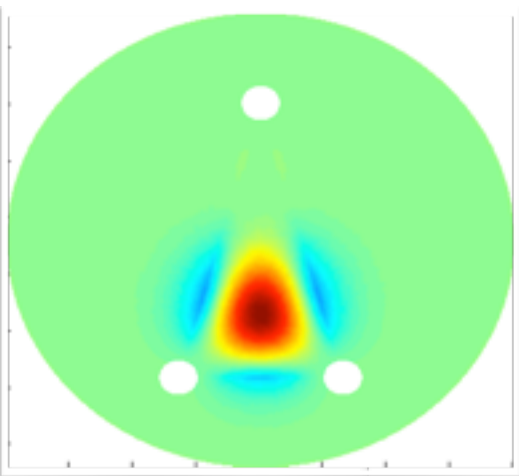
$\omega^2 \in \mathbb{R}^-$
Modes évanescents

$\omega^2 \in \mathbb{R}^+$
Modes guidés





Illustrations numériques $\kappa_\varepsilon \in I_c$

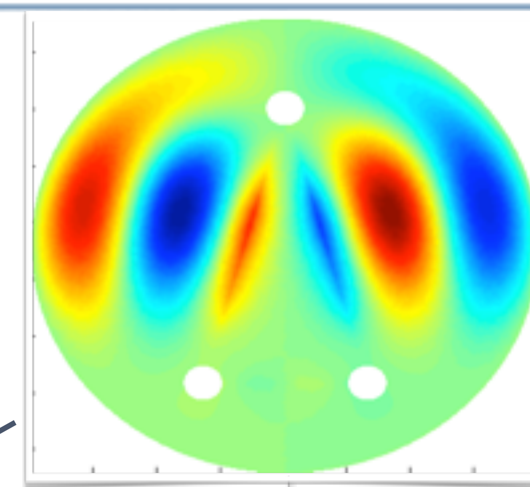


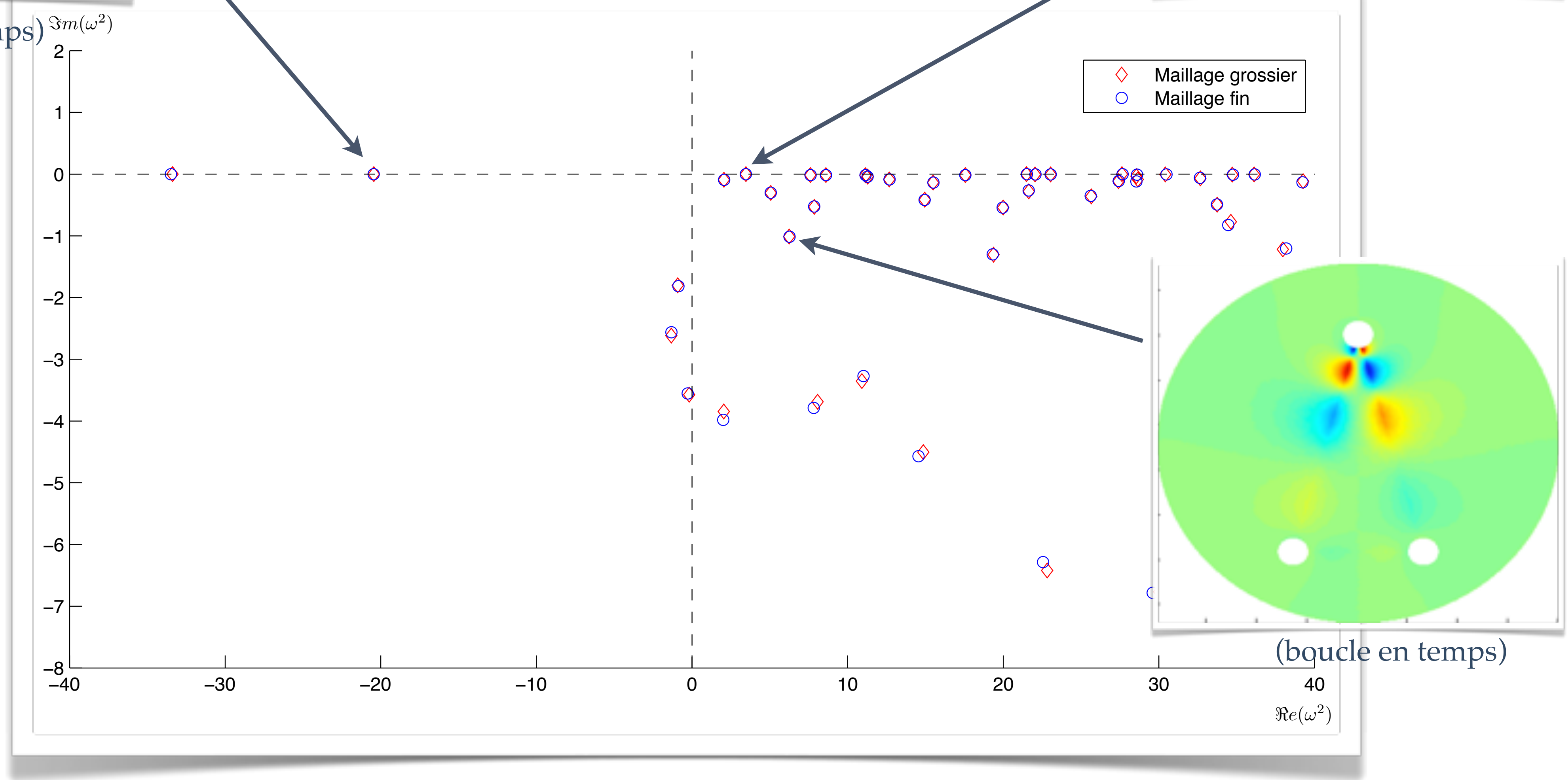
(boucle en temps)

Animation en temps $e^{-i\,\omega_j(\beta)t}$

$\omega^2 \in \mathbb{R}^-$
Modes évanescents

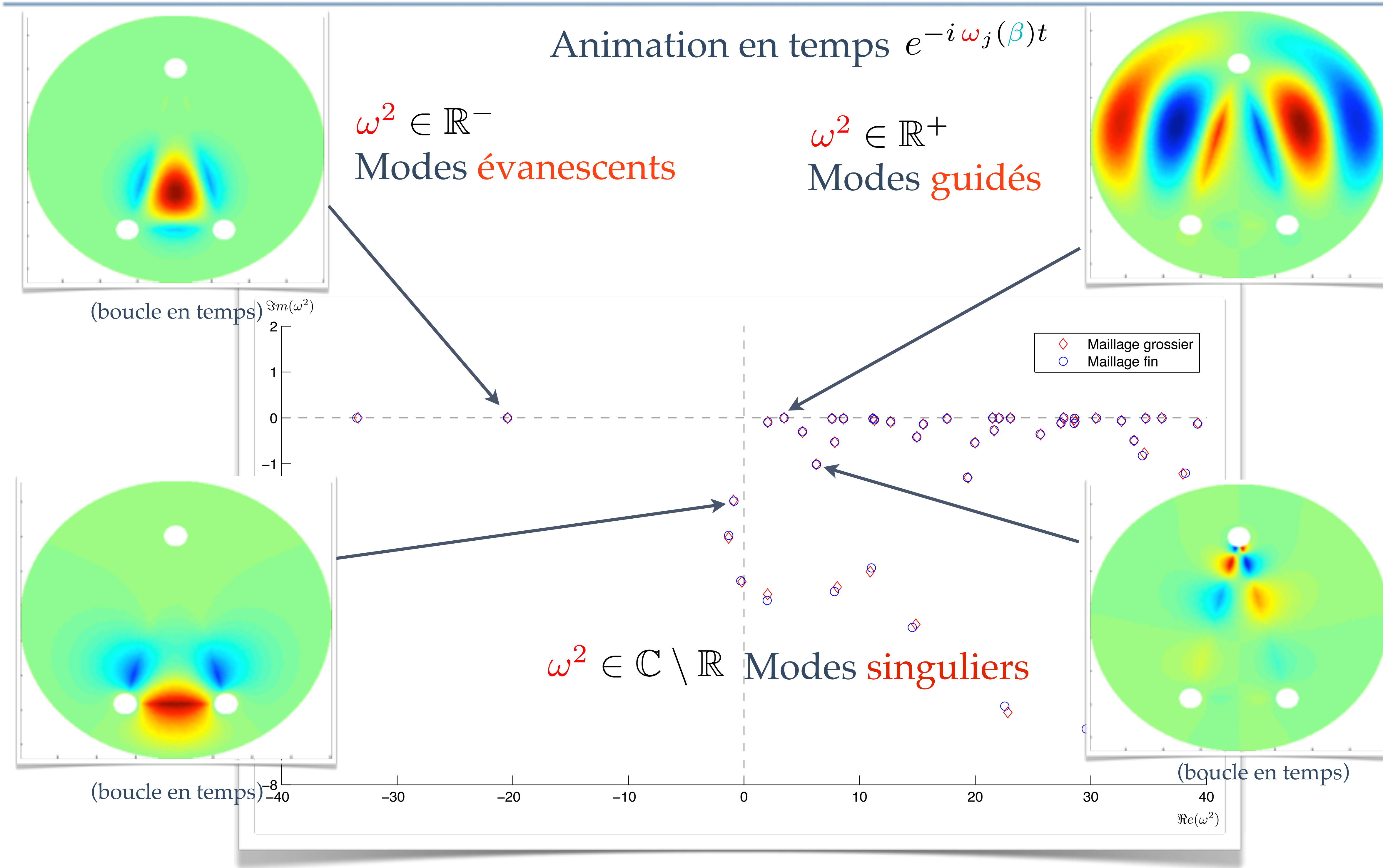
$\omega^2 \in \mathbb{R}^+$
Modes guidés





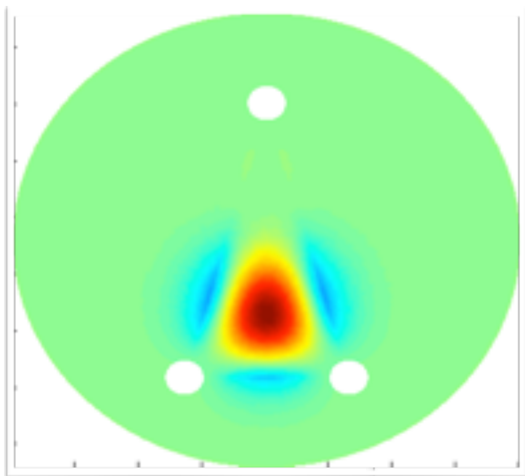
(boucle en temps)

Illustrations numériques $\kappa_\varepsilon \in I_c$



Illustrations numériques $\kappa_\varepsilon \in I_c$

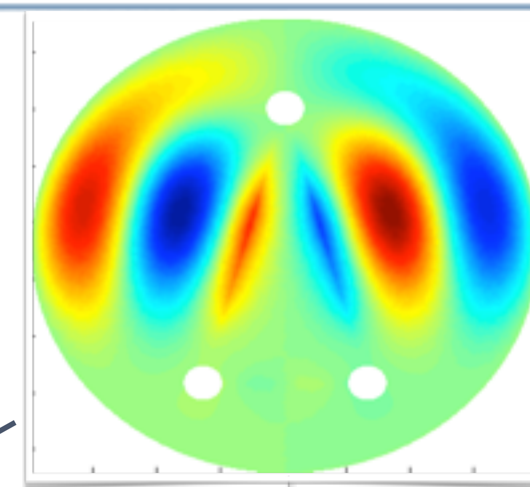
Animation en temps $e^{-i\,\omega_j(\beta)t}$

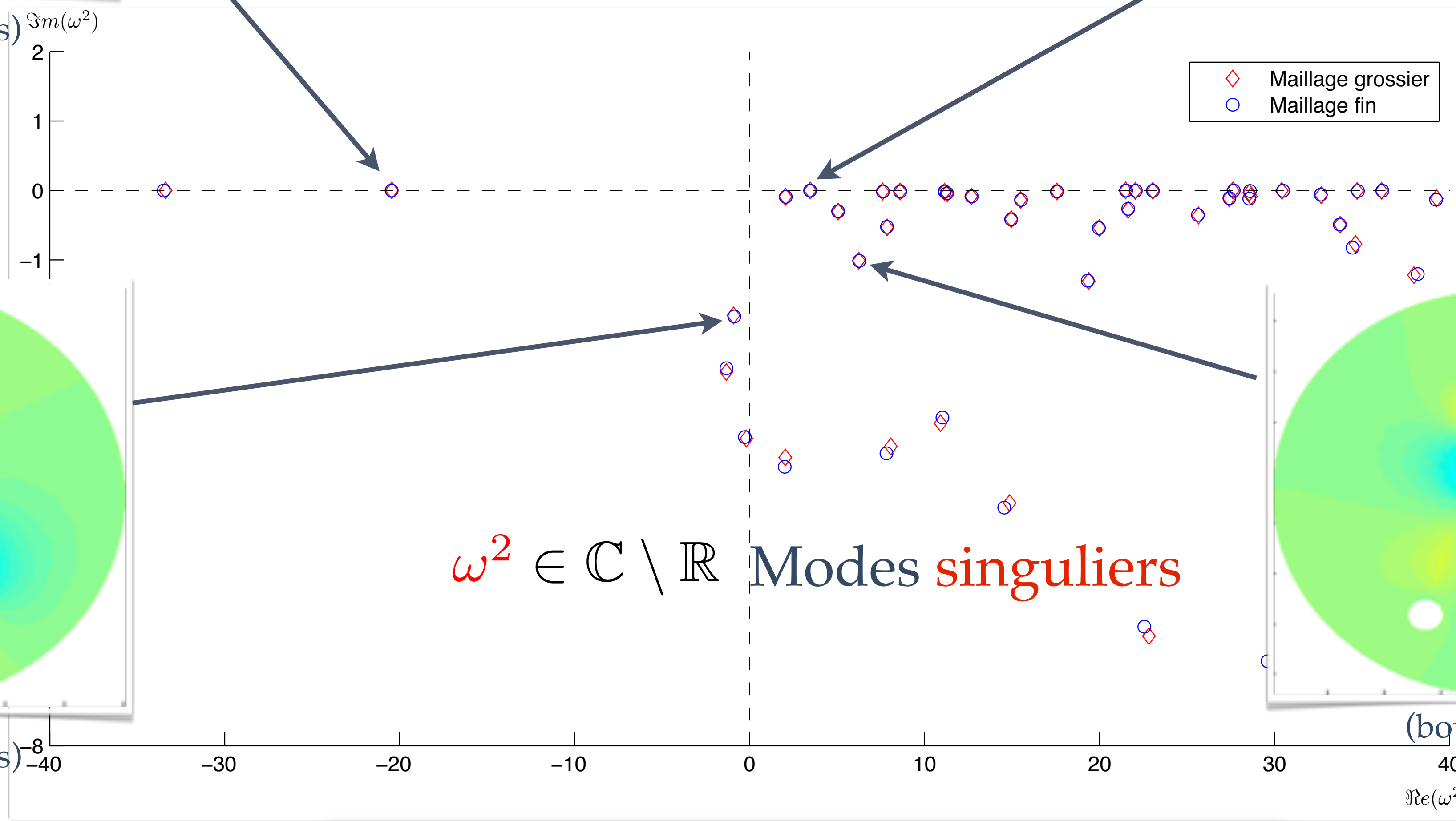


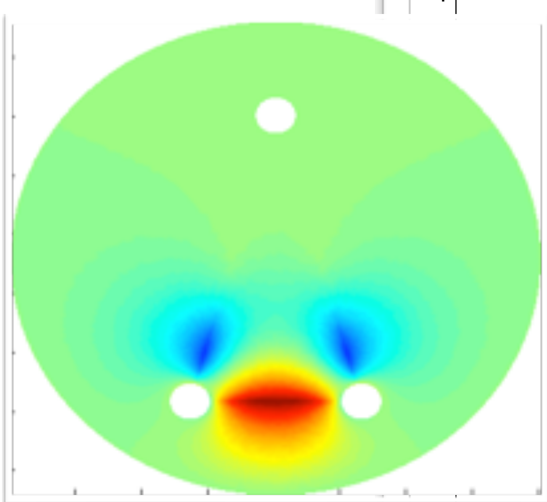
(boucle en temps)

$\omega^2 \in \mathbb{R}^-$
Modes évanescents

$\omega^2 \in \mathbb{R}^+$
Modes guidés

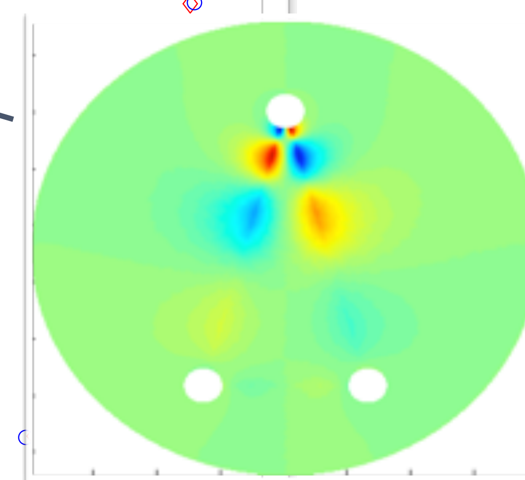






(boucle en temps)

$\omega^2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ Modes singuliers

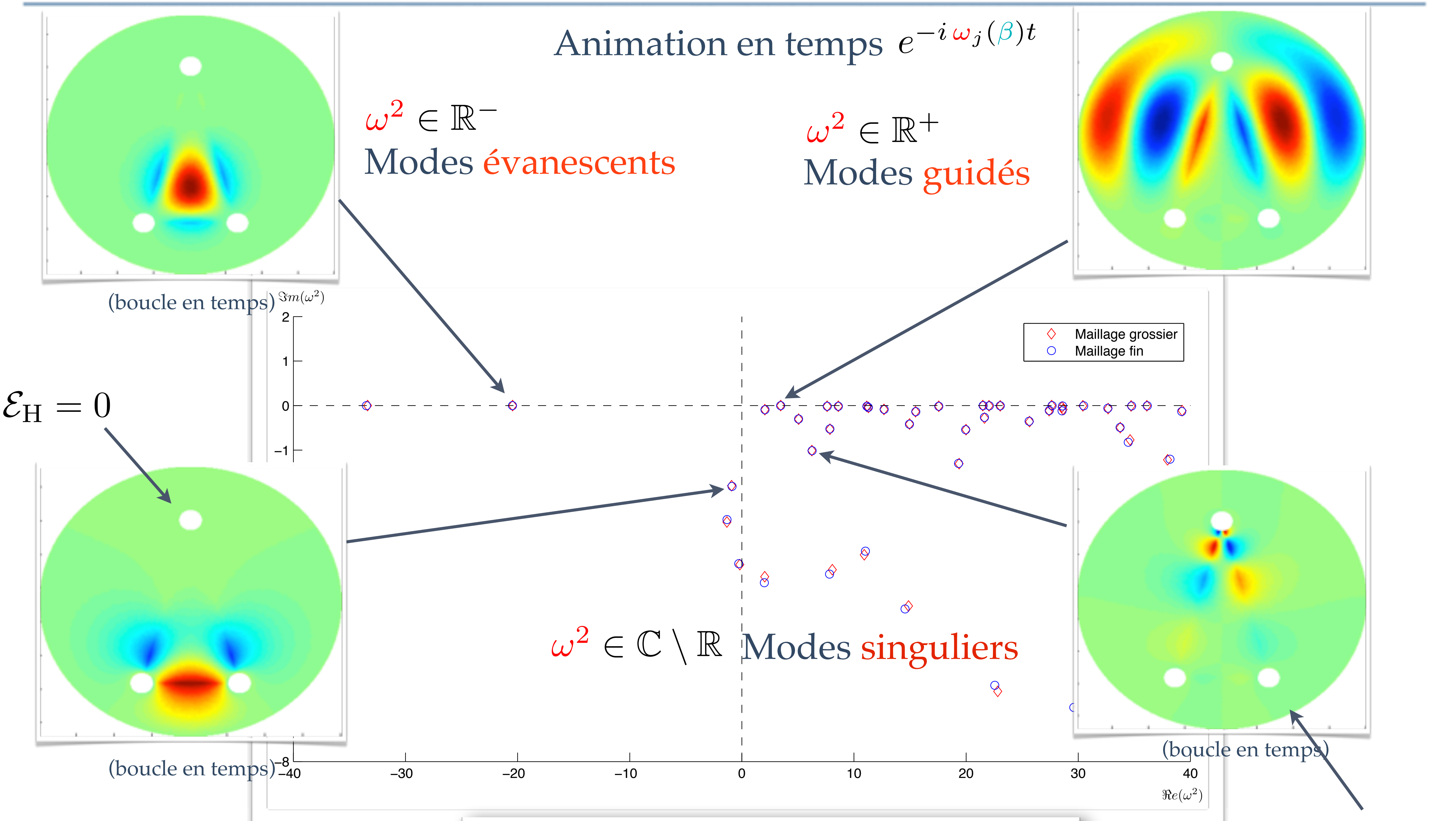


(boucle en temps)

Conservation d'énergie :

$$\mathcal{E}_{\mathrm{H}} + \mathcal{E}_{\mathrm{G}} + \mathcal{E}_{\mathrm{D}} = \Im m(\omega^2) \int_\Omega \mu |u|^2$$

Illustrations numériques $\kappa_\varepsilon \in I_c$



Conservation d'énergie :

$$\mathcal{E}_{\mathrm{H}} + \mathcal{E}_{\mathrm{G}} + \mathcal{E}_{\mathrm{D}} = \Im m(\omega^2) \int_\Omega \mu |u|^2$$

Sommaire

- Partie I : Règles de maillage pour les coins dans le cas $\kappa_\varepsilon \notin I_c$
- Partie II : le guide d'ondes plasmonique scalaire
  - Étude hors intervalle critique
  - Étude dans l'intervalle critique
- **Perspectives**

Perspectives

Étude de problèmes de valeurs propres non linéaires

Le guide d'ondes plasmonique avec les équations de Maxwell

Analyse numérique de la méthode avec PMLs

Le guide d'ondes métamatériaux/diélectrique $\varepsilon_{\mathrm{m}} < 0 \quad \mu_{\mathrm{m}} < 0$

En temporel : le principe d'amplitude limite

Perspectives

Étude de problèmes de valeurs propres non linéaires

Reprendre en compte la dispersion dans la permittivité. Différents modèles (Drude, Drude-Lorentz, Drude non local,...)

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)$$

Vial (2013), Brûlé (2016) (Institut Fresnel).

Dans ce cas les valeurs propres complexes sont liées à des modes à fuites.

Perspectives

Étude de problèmes de valeurs propres non linéaires

Le guide d’ondes plasmonique avec les équations de Maxwell

La T-coercivité pour les équations de Maxwell a été développée et utilise les potentiels de la décomposition de Helmholtz des champs.

Bonnet-Ben Dhia, Chesnel et Ciarlet (2012, 2014).

Hors intervalle critique, l’opérateur est auto-adjoint et à résolvante compacte (Chapitre 5).
L’analyse numérique est plus technique.

Ciarlet, Lohrengel-Lefèvre et Nicaise (2010).

Dans l’intervalle critique, l’opérateur n’est ni auto-adjoint et ni à résolvante compacte à cause des mêmes singularités que celle du problème scalaire.
Peut-on utiliser la méthode avec PMLs ?

Lohrengel (1999).

Perspectives

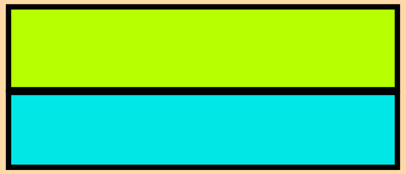
Étude de problèmes de valeurs propres non linéaires

Le guide d'ondes plasmonique avec les équations de Maxwell

Analyse numérique de la méthode avec PMLs

1) Estimation d'erreur lors de la troncature de la PML. Kalvin (2011)

2) L'analyse numérique basée sur la T-coercivité est non clarifiée dans ce cas.



$$a_{\alpha}(u,v) = \int_{\Omega} \varepsilon^{-1} \left(\alpha \partial_z u \, \overline{\partial_z v} + \frac{1}{\alpha} \partial_\theta u \, \overline{\partial_\theta v} \right) \qquad \alpha \in \mathbb{C}$$

Perspectives

Étude de problèmes de valeurs propres non linéaires

Le guide d'ondes plasmonique avec les équations de Maxwell

Analyse numérique de la méthode avec PMLs

Le guide d'ondes métamatériaux/diélectrique $\varepsilon_{\mathrm{m}} < 0 \quad \mu_{\mathrm{m}} < 0$

Problème spectral plus difficile (plus de produit scalaire pondéré, problème non auto-adjoint, perte d'injection compacte pour les équations de Maxwell ...)

Perspectives

Étude de problèmes de valeurs propres non linéaires

Le guide d'ondes plasmonique avec les équations de Maxwell

Analyse numérique de la méthode avec PMLs

Le guide d'ondes métamatériaux/diélectrique $\varepsilon_\mathrm{m} < 0 \quad \mu_\mathrm{m} < 0$

En temporel : le principe d'amplitude limite

Valider la présence d'un régime périodique établi en fonction de l'intervalle critique, et prendre en compte la pertinence des modèles de permittivité.
Questions abordées via le projet ANR METAMATH, dirigé par S. Fliss, et en collaboration avec C. Scheid.

Cassier (2014), Viquerat (2015), Vinoles (2016).

Merci de votre attention.